上海出版资金项目

Shanghai Publishing Funds

数学巨匠

从欧拉到冯·诺伊曼

Ioan James

Remarkable Mathematicians

From Euler to von Neumann

约安·詹姆斯 著

潘澍原 林开亮 等译

CAMBRIDGE

Philosopher's Stone Series 哲人石丛书 当代科技名家传记系列



数学家并非因为纯粹数学有用才去研究它；他们研究它是因为能够从中获得乐趣，能够获得乐趣则是因为纯粹数学是美丽的。

——庞加莱

上海科技教育出版社

VISIT…

LANZAROTE Caliente.com

世纪出版

哲人石丛书 Philosopher's Stone Series

当代科技名家传记系列

数学巨匠 从欧拉到冯·诺伊曼
生物学巨匠 从雷到汉密尔顿
物理学巨匠 从伽利略到汤川秀树
量子、猫与罗曼史 薛定谔传
发现空气的人 普里斯特利传
星光璀璨 美国中学生描摹大科学家
穿越歧路花园 司马贺传
天才的拓荒者 冯·诺伊曼传
旷世奇才 巴丁传
孤独的科学之路 钱德拉塞卡传

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS
www.cambridge.org

此版本仅限在中华人民共和国境内
(不包括香港、澳门特别行政区及台湾省)销售。

上架建议:科普读物/人物传记

ISBN 978-7-5428-6453-6
9 787542 864536 >
定价: 68.00 元

易文网: www.ewen.co

哲人石丛书

Philosopher's Stone Series

当代科技名家传记系列

上海出版资金项目

Shanghai Publishing Funds

数学巨匠

从欧拉到冯·诺伊曼

约安·詹姆斯 著

潘澍原 林开亮 等译

上海科技教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学巨匠:从欧拉到冯·诺伊曼/(美)约安·詹姆斯著;潘澍原,林开亮等译. —上海:上海科技教育出版社,2016.9
(哲人石丛书)
书名原文:Remarkable Mathematicians
ISBN 978-7-5428-6453-6

Ⅰ.①数… Ⅱ.①约… ②潘… ③林… Ⅲ.①数学家—生平事迹—世界—通俗读物 Ⅳ.① K816.11-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 159673 号

序

本书是为那些想要对生于18、19世纪和20世纪早期的一些最为重要的数学家的生平故事稍作了解而无意深究的读者写作的。全书10章，每章6节，合而成为60篇传略。通过他们的思想、他们的教学或是其他方式，他们对数学作出了重要贡献。本书的重点主要在于他们各异而多样的生平故事，而非其成就的具体内容。这些传记以数学家们的出生日期为时序排列，这样在顺次阅读时，它们就以人物的形式展现出数学发展历程的某些方面。数学史往往提及数百位在该学科发展过程中发挥过一定作用的人物，而我所遴选的这60位则对描述其发展主线具有充分的代表性。

在撰写本书时，我预想读者会对数学抱有兴趣而未必熟知该学科的历史——我相信这包括许多有教养的公众，而他们恐怕不会认为自己是数学家。我希望本书在高等院校里会成为有用的背景读物，特别是对那些可能没有时间或意愿一究数学历史详情的人们。若能对为数学发展作出贡献的人物有所了解，这一学科就会变得更有趣味。书中只有少量必须的技术细节，欲知其详者则易于他处求得。

我们将会看到，这一时期的数学名家是一个异常多样的人物群体。大多数人的名字——如果不是全部的话——几乎为所有当代数学家所熟悉。每篇传略都配有一幅肖像。清晰展现出来的一点是，并不存在什么作为典型数学家的通性。任何想要寻觅偶像的数学学生都将会在书中发现某些有趣的事例。最后，我试着给出一些一般的结论。我也提供了一些进阶阅读的建议。

我需要向许多帮助过我的人们表达感谢，他们或曾审读本书的部分稿件并提出意见，或曾解答特殊的问题。他们中有阿伯斯(Don Albers)、亚历山德森(Jerry Alexanderson)、巴罗-格林 (June Barrow-Green)、卡林格(Ron

Calinger)、道克（Ann Dowker)、福韦尔（John Fauvel)、格雷(Jeremy Gray)、弥永昌吉(S. Iyanaga)、劳里(John Lowry)、帕歇尔(Karen Parshall)、斯图尔特(Rosemary Stewart)、蒂勒(John Tyrer)和威尔逊(Robin Wilson)。我同样应当致谢的是日立基金会(Hitachi Foundation)通过国际数学史虚拟研究院(IVIHSM)提供的资助。插图与长篇引述的来源已尽可能地在书末给出*。

牛津大学数学研究所

2001年9月

* 关于这些内容,详见上海科技教育出版社网站。——编者

前言

从1707年欧拉（Euler）诞生到1987年柯尔莫戈洛夫(Kolmogorov)逝世，其间跨越了将近三个世纪。然而，高斯(Gauss)降生之际欧拉尤在，克莱因(Klein)初诞之时高斯未艾，而今世仍有知克莱因者。是故在某种意义上，我们可借数步重返早先的年代，那时，微积分还有几分神秘。17世纪发生了一场宏大的科学革命，主要与牛顿(Newton)的工作相关，亦有笛卡儿(Descartes)、莱布尼茨(Leibniz)和其他人物的贡献。前半个世纪这些伟大的思想者纷涌一时，后半个世纪则光辉略逊而多在巩固，但在那些主要人物如雅各布·伯努利(Jakob Bernoulli)和莫佩尔蒂(Pierre Maupertuis)的推动下也有所进展。

中世纪的大学通同之处颇多，其课程均基于"四艺"和"三艺"*。然而，尽管拉丁文仍保留作学术语言，宗教改革之后，这些大学在欧洲的不同区域以不同的方式发展。整个18世纪甚至更晚，这些大学都基本专注于教育，特别是职业教育。教授的课程有神学、法律和医学，但不包含自然科学的任何内容。除了欧几里得《几何原本》(*Elements*)的部分内容，数学在很大程度上被忽视。开展研究的不是那些大学，而是科学院，特别是柏林、巴黎和圣彼得堡的科学院。这些科学院属于研究机构，并处于国家控制之下，而非诸如伦敦皇家学会那样的独立团体。

在19世纪以前，刊载新发现以供周知的科学期刊很少，研究通常以书籍的形式发表。这是专著流行的年代，牛顿的《自然哲学的数学原理》(*Principia*)就是一个著名的例子。而我们将看到，一流学者之间的通信同样起到了重要

* "四艺"为算术、几何、天文、音乐，旨在宇宙内在理性之探索；"三艺"为文法、修辞与逻辑，旨在经典人文表达之养成，故亦称"三文"。两者合称"自由七艺"，为欧洲中世纪之教育核心与学术基础。——译者

作用。同时,个人游访迁移规模惊人,在这一过程中传播着新的思想。19世纪法国和德国之间产生了强烈竞争,但这门学科发展始终超越国界——数学家们的"无形学院"总是国际性的。

在本书中,其他语言的表达往往被译为英文,并视情形需要附列原文*。直译有时不能令人满意,比如对法语"système du monde"而言,译为"solar system"似乎较"world system"更合适,而对德语"Geheimrat"来说,译为"Excellency"或"Counsellor"比"Privy Councillor"更妥当。另一些表达似乎保留不译为好,如法语里的"Lycée"和"Grande Ecole"**,以及德语里的"Gymnasium"和"Technische Hochschule"***,因为翻译中语义的一致性无法保证。

知道某个术语的内涵会随着时间和地域发生很大改变非常重要。譬如,在18世纪,"geometer"意即数学家(而非几何学家)。而"professor"一词往往应被理解为讲师(而非教授)——几乎所有的大学职位都是"教授",如同现今美国那样,通常其薪水欠丰但可以兼职。其他可能难以理解的地方,诸如不同国家教育制度的特点等等,在其首次出现时就予以阐明,看来是最好的做法。

* 中译本视情形需要附列原文。——译者

** "Lycée"是指法国的国立高中,"Grande Ecole"是指法国开展精英式教育的大学。——译者

*** "Gymnasium"是指德国的高级文理中学,"Technische Hochschule"是指德国的工业大学。——译者

目录

序 / *1*
前言 / *3*

第一章 **从欧拉到勒让德** / 1
欧拉(1707—1783) / 1
达朗贝尔(1717—1783) / 8
拉格朗日(1736—1813) / 15
蒙日(1746—1818) / 21
拉普拉斯(1749—1827) / 29
勒让德(1752—1833) / 37
第二章 **从傅里叶到柯西** / 42
傅里叶(1768—1830) / 42
热尔曼(1776—1831) / 47
高斯(1777—1855) / 58
泊松(1781—1840) / 69
彭赛列(1788—1867) / 76
柯西(1789—1857) / 81
第三章 **从阿贝尔到格拉斯曼** / 90
阿贝尔(1802—1829) / 90
雅可比(1804—1851) / 97
狄利克雷(1805—1859) / 102
哈密顿(1805—1865) / 108
刘维尔(1809—1882) / 115
格拉斯曼(1809—1877) / 122
第四章 **从库默尔到凯莱** / 127
库默尔(1810—1893) / 127
伽罗瓦(1811—1832) / 132
西尔维斯特(1814—1897) / 139

魏尔斯特拉斯(1815—1897) / 148
切比雪夫(1821—1894) / 157
凯莱(1821—1895) / 163
第五章　**从埃尔米特到李** / 171
埃尔米特(1822—1901) / 171
克罗内克(1823—1891) / 175
黎曼(1826—1866) / 180
史密斯(1826—1883) / 187
戴德金(1831—1916) / 193
李(1842—1899) / 199
第六章　**从康托尔到希尔伯特** / 206
康托尔(1845—1918) / 206
米塔-列夫勒(1846—1927) / 213
克莱因(1849—1925) / 218
柯瓦列夫斯卡娅(1850—1891) / 228
庞加莱(1854—1912) / 235
希尔伯特(1862—1943) / 243
第七章　**从E·H·穆尔到高木贞治** / 255
E·H·穆尔(1862—1932) / 255
阿达马(1865—1963) / 260
豪斯多夫(1868—1942) / 269
嘉当(1869—1951) / 277
博雷尔(1871—1956) / 281
高木贞治(1875—1960) / 290
第八章　**从哈代到莱夫谢茨** / 297
哈代(1877—1947) / 297
维布伦(1880—1960) / 304
布劳威尔(1881—1966) / 312

诺特(1882—1935) / 319
R·L·穆尔(1882—1974) / 325
莱夫谢茨(1884—1972) / 332
第九章 **从伯克霍夫到亚历山大** / 338
伯克霍夫(1884—1944) / 338
外尔(1885—1955) / 344
波利亚(1887—1985) / 348
拉马努金(1887—1920) / 355
柯朗(1888—1972) / 360
亚历山大(1888—1971) / 369
第十章 **从巴拿赫到冯·诺伊曼** / 378
巴拿赫(1892—1945) / 378
维纳(1894—1964) / 385
亚历山德罗夫(1896—1982) / 391
扎里斯基(1899—1986) / 399
柯尔莫戈洛夫(1903—1987) / 405
冯·诺伊曼(1903—1957) / 410

后记 / 417
译后记 / 425

第一章

从欧拉到勒让德

我们要讲述的前6位数学名家生于1707—1752年的46年间，其中4位来自法国，另外2位分别来自意大利与瑞士。

欧拉(1707—1783)

就数学而言，18世纪是欧拉(Leonhard Euler)的年代。但在我们了解他之前，尚有必要对伯努利家族这一显赫之家略言几句。他们原籍安特卫普，16世纪末为躲避西班牙人对新教徒的迫害，离开尼德兰而定居巴塞尔，在那里通过联姻而进入商人阶级。自雅各布和约翰这对兄弟*开始，他们家族的数学名家世代辈出。上述两位因生年较早而未归入本书详述名家之列。约翰那性好争论的儿子丹尼尔(Daniel)

* 雅各布・伯努利(Jakob Bernoulli，1654—1705)与约翰・伯努利(Johann Bernoulli，1667—1748)兄弟，17—18世纪瑞士杰出数学家。他们是微积分早期发展的重要推动者和传播者，并对其后变分法的发展有重要的奠基性贡献。雅各布还是概率论的主要创立者，以"伯努利分布"等名世。约翰则更为多产，且在数学教育方面卓有贡献，其研究还广涉物理学、化学和天文学等其他学科。但伯努利兄弟因相互嫉妒多有激烈龃龉之辞，而约翰争强好胜之性尤盛。——译者



正在我们关注的时期之内，不过，一如牛顿(Isaac Newton)，他以物理学家而非数学家著称。在数学上，他伯父雅各布和朋友欧拉的灿烂光芒，令他黯然失色。

莱昂哈德·欧拉于1707年4月5日在巴塞尔出生。他的先祖大多是工匠，但其父亲保罗·欧拉(Paul Euler)是新教归正福音会的牧师。保罗·欧拉熟悉伯努利家族，因为他曾与约翰同住在雅各布家中向其学习数学。保罗·欧拉的妻子玛格丽特·布鲁克(Margarete Brucker)也是牧师之女。在儿子降生的次年，他们一家迁至附近的里恩村，父亲保罗在此做牧师。小莱昂哈德与两个妹妹安娜·玛丽亚(Anna Maria)和玛丽亚·玛格达莱纳(Maria Magdalena)一起长大。在家中接受了一些早期教育之后，他被送回城里随外祖母居住，并进入巴塞尔的旧式拉丁学校学习，但那里并不教授数学。1720年欧拉13岁，他被巴塞尔大学的哲学系录取——那时所提供的教育只有普通水准。欧拉完成了所有科目的学业，于1722年15岁时毕业。同年，他竞聘逻辑学教授与法律学教授职位，却未能成功。

第二年，欧拉按父亲的意愿转入神学系，但在神学之外他开始认真研习数学。在其自传小记里，他写道："不久我得到一个机会，被引荐给著名教授约翰·伯努利。他确实太过忙碌，是故直接拒绝向我私人授课，但他也给予我更有价值的建议——要我自己开始阅读更为艰深的数学书籍，并尽己所能勤加研习。如果我遇到某些障碍或困难，我可以在每周六下午随意地拜访他，而他则亲切地向我解释我所不能理解的每个问题。"约翰·伯努利曾被认为是欧洲的顶尖数学家之一，但他通常的教学内容也不过是初等水平。

1724年，在撰写了比较笛卡儿(Descartes)与牛顿的自然哲学的论文之后，17岁的欧拉获得了他的硕士学位。此时他已经结识了几位伯

努利家族中的年轻成员,包括比他大七岁的约翰之子丹尼尔。约翰自己也越发意识到他的这名学生是一个天才。在他晚年给欧拉写信时,那些称呼显示出他不断增加的敬重:1728 年他致信欧拉,将他称作"非常博学与机智的青年";次年称谓变作"高度知名而博学之士";后来又作"高度知名且最为睿智的数学家",之后一直到 1745 年,则称他为"无与伦比的欧拉,数学家中的王子"。

虽然欧拉是一位虔诚的加尔文宗教徒,但在约翰·伯努利的支持下,他说服父亲让他从事数学而不是任职教会。在接下来的两年里,欧拉一面求职,一面撰写他的第一篇重要研究报告,那是关于声学理论的。他还参加了巴黎的皇家科学研究院(后文通称"巴黎科学院")主办的关于帆船桅杆定位技术的有奖竞赛,并获得了鼓励奖。

至少到 19 世纪末,有奖竞赛是科学生活的一个重要特色。它们原本是征求特定问题解答的一种方式。竞赛往往由那些皇家科学院发起——尤其是柏林和巴黎的,尽管它们也为不知名的年轻研究者提供了机遇,但参加的基本上还是那些业已有所成就的学者。以巴黎科学院为例,竞赛奖金被授予那些解决数学和物理科学上特定问题的研究报告。按程序规则,每一个参赛项目必须以一个化名或一个座右铭为代号,并附上一封有着同样代号而内含作者姓名的密封信封,尽管这姓名往往会被评委猜出。伯努利家族的人经常在这些竞赛中获胜,特别是丹尼尔。

在约翰·伯努利的支持下,欧拉申请了巴塞尔大学空缺的物理学教授职位,但未获成功,部分原因是他太过年轻。在瑞士谋取教职的前景貌似并不乐观。但不久前丹尼尔·伯努利接受了新近在圣彼得堡创立的俄罗斯帝国科学研究院(后文通称"圣彼得堡科学院")的一个高级职位邀请。1725 年,他和兄长尼古拉*迁至那里,并在两年后安排他

---

* 即尼古拉·伯努利第二(Nicholaus Bernoulli, 1695—1726),瑞士数学家。他是其父亲约翰·伯努利的重要工作助手,自己在数学上的主要工作则集中于曲线论、微分方程与概率论。1725 年他应彼得大帝之邀与胞弟丹尼尔一同前往圣彼得堡科学院任职,但不久即因瘟热病逝。——译者

的年轻同胞欧拉加入。起初给予欧拉的是科学院医学部的一个低级职位,这意味着他必须花费数月学习解剖学和生理学,但不久他就设法调动到数学部,并成为一名正式职员。欧拉寄宿在丹尼尔·伯努利家中,当他的研究兴趣主要在力学和物理学特别是流体力学上时,还常与丹尼尔一道工作。

欧拉曾学过俄语,很快便安定下来享受这个大城市的社会生活。不幸的是,那位曾努力延续其亡夫——令人敬畏的彼得大帝(Tsar Peter the Great)——革新政策的叶卡捷琳娜一世(Catherine the First),在欧拉抵达时恰巧离世,随后俄国进入了一段政治倒退和封闭排外的时期。当丹尼尔·伯努利在俄国首都度过6年之后回返巴塞尔时,欧拉接替他担任了科学院的首席数学家。同年,感到经济稳固的他,与一位在俄国工作的瑞士艺术家之女凯瑟琳娜·格塞尔(Catharina Gsell)成婚。他们在涅瓦河边的一处舒适寓所安居。

在首次寓居圣彼得堡的14年间,欧拉为俄国的学校撰写初等和高等数学课本,并解决了许多俄国政府向他提出的实际问题。担任数学教授的同时,他还负责地理学部事务,其职责之一是备制一份全国地图。不过,他主要从事的还是数学研究。他在这一时期最知名的工作也许是1736年对柯尼斯堡七桥问题的构思和解决,这标志着今日所知的数学分支"图论"的创始。对于此一问题,欧拉使用了莱布尼茨(Leibniz)的术语"位置分析"*,这或许是他从伯努利家族的某人处闻得的。在这段时间他撰写了一部专著《力学》(*Mechanica*),在其中他展示了数学分析可被系统地应用于牛顿的动力学。事实上,在这一时期他撰著近90篇论作发表,并做了后来被进一步发展的各类重要思想的笔记。他还参与竞争巴黎科学院提供的年度竞赛奖金,并胜出不下12次,这甚至超过了丹尼尔·伯努利的纪录。也正是在此期间,他右眼失

* "位置分析"(analysis situs)一词最先由莱布尼茨使用,初指一类与地形研究相关的几何分析,在欧拉借其概念解决七桥问题后即逐渐发展为拓扑学,以故该词成为后者的旧称,如1895年庞加莱的代数拓扑学专著即以此为名。——译者

明,这可能是由淋巴结核所致。

不幸的是,在尚未成年的沙皇伊万六世(Tsar Ivan the Sixth)之母、摄政王安娜·利奥波多芙娜(The Regent Anna Leopoldovna)去世之后,俄国的气氛再度变得压抑起来。是故,欧拉于1741年接受了普鲁士国王腓特烈大帝(Frederick the Great)的邀请,前往波茨坦的普鲁士皇家科学研究院(后文通称"柏林科学院"),该科学院刚刚在一段时期的衰落后重新组建。由于仍在圣彼得堡科学院支领薪酬,欧拉在其后居留柏林的25年里,一直高效地同时为这两个科学院工作。初到普鲁士,对于王太后的问询,欧拉仅仅给予几个字眼的回复。尽管他反应热诚,王太后仍抱怨他的生怯与矜持:"您为什么不与我多说话呢?"她问道。"太后大人,因为我刚从一个人人都会因说话而被绞死的国度而来。"欧拉一家起先在贝伦街的一间宅舍安顿下来——该处至今留存,其后又获得柏林附近夏洛滕堡的一处居所。

正是在此期间,他完成了他的杰作,即那篇用弗兰卡语*写成的关于变分法的研究报告——《寻求具有某种极大或极小性质的曲线的方法》(Methodus inveniendi lineas curvas maxime minimive proprietate gaudentes)。1774年该文发表,他因此入选伦敦皇家学会和巴黎科学院,并获得不少其他荣誉。1750年,他猜测了凸多面体的表面数、棱数和顶点数之间的著名公式**,并尝试证明。在大众普及层面,他出版了著名的《致一位德国公主的信》(*Lettres à une Princesse d'Allemagne*),由为国王的侄女安哈尔特-德绍公主(Princess of Anhalt-Dessau)讲授的科学课程组成。写于1760至1762年间的这234封书信,是18世纪最为成功的科学普及作品之一。除了其表面作用之外,这些信还为我们提供了一位18世纪科学领袖对自然哲学最为详尽与权威的撰述手法。它们由德文被译成多种语言。以上这些不过是他巨量著作的些许代表

---

* 一种在地中海沿岸地区通用的商贸语言。——译者

** 此即多面体之欧拉公式:多面体表面数(F)减去棱数(E)再加上顶点数(V),恒等于2。——译者

而已。

腓特烈大帝将科学视作国家之仆役。对他而言,科学的重要性在于其推动技术进步的能力。他首先寻求的是强化军队和扩张领地。腓特烈本人没有太多理论科学和数学的知识,故而他以实际上的和军事上的适用性来衡量科学院中科学家们的业绩。然而,尽管国王关于科学的观念片面狭窄,还是有大量的理论科学研究在科学院内得以进行,因为他分派给其成员的实际问题并不耗费太多精力,故有大量的时间留下来做独立自主的工作。"[在研究上]我可以做我想做的",欧拉告诉一位朋友。"国王称我为他的教授,我想我是这世上最幸福的人了。"不幸的是,这一境况没能持续多久。

起初,该科学院由伟大的法国科学家莫佩尔蒂*主持。他 1759 年去世之后,欧拉接手了管理事务,但却处于对他不完全信任的国王的直接监督之下。在各种大量的管理职责外,欧拉还被要求承担解决包括财政、弹道、航行、供水等各类实际问题的任务。国王还期望他在诸如购买科学仪器、建造水力磨坊、设计彩票抽奖、改善运河通行乃至筑设一面环绕科学院花园的石墙等事务上提出建议。尽管七年战争期间这位普鲁士君王几乎都不在柏林,但他却对该科学院的管理特别是在职位委任方面兴致浓厚。这最终导致了他与期望有一定程度学术自由的欧拉之间的关系僵化。欧拉日渐失去国王的宠爱,国王往往鄙视欧拉,而称其为"我的库克罗普斯"以暗指其一眼失明**。因此,欧拉在 1766 年 59 岁时离开了柏林,回返圣彼得堡,这令国王十分不高兴。

在他再次寓居圣彼得堡直至离世的 17 年间,俄国正值原本是德国人的叶卡捷琳娜大帝(Empress Catherine the Great)在位。她对欧拉颇为慷慨,甚至将她的一名御厨借与他使用。"我与其他所有有幸曾在

* 莫佩尔蒂(Pierre Maupertuis, 1698—1759),一译莫陪督,18 世纪前期法国著名物理学家、数学家、哲学家。物理学著名的"最小作用量原理"即由他最先提出,他还阐述了这一原理在经济、社会乃至宇宙论等方面的意义。——译者

** 库克罗普斯(Cyclops),希腊神话中的一名独眼巨人。——译者

俄罗斯帝国科学院待过的人",欧拉写道,"都不得不承认我们应将自己的地位和所得的一切归功于我们在那里的优厚条件。"不过,欧拉回返俄国首都之初却连遭厄难。他的居舍被焚毁以致财物多有所失。另外,由于对那只好眼球进行的白内障移除手术失败,他变得近乎全盲。幸好欧拉拥有天赐的惊人记忆力——童年时他就能背诵维吉尔(Virgil)的《埃涅阿斯纪》* 全篇。他心算复杂微积分的能力广为人知,而他的记忆力则无疑帮助他对抗了黑暗,使此后的余生成为其职业生涯中成果最丰的阶段之一。

欧拉的发妻凯瑟琳娜于 1776 年过世。他们的 13 个孩子中,唯有 3 个儿子和 2 个女儿长大成年。欧拉特别宠爱孩子们,他搞数学研究时常把一个孩子放在膝头。1777 年,他再婚了,新娘是凯瑟琳娜的异母姐妹萨洛梅·格塞尔(Salome Abigail Gsell)。1783 年 9 月 18 日,欧拉突然中风辞世,享年 76 岁。当天的早些时候他给一位孙儿上了一堂数学课,还完成了气球上升规律的一些运算,并和他的助手们就新发现的天王星轨道进行了讨论。

欧拉的精力似乎是无穷无尽的。他在纯粹数学上的主要研究领域是微积分、微分方程、曲线和曲面上的解析几何与微分几何、数论、无穷级数,以及变分法。应用数学方面,他创立了分析力学。他撰写了显明晓畅的力学、代数、数学分析、解析几何、微分几何及变分法的教材,这些皆是一个世纪乃至更长时间的典范。他的数学物理研究则建基于丹尼尔·伯努利的工作。例如,在流体力学上他发现了理想流体运动的一些基本的微分方程,而后将它们应用于人体内的血液流动。在热学理论上,他遵从丹尼尔·伯努利,将热看作分子的一种震荡。他是 18 世纪少数几名赞同光的波动说而非与之相对的微粒说的科学家之一。他曾研究声音的传播,并在光的折射和散射方面获得许多结果。

---

* 《埃涅阿斯纪》(*Aeneid*),古罗马诗人维吉尔所作 12 卷史诗。该诗叙述特洛伊失陷后王子埃涅阿斯流浪冒险的事迹,为早期拉丁文学经典之一。——译者

然而,欧拉还因其使用数学解决实际问题的才能而著称。例如,他曾仔细研究横梁的弯曲并计算柱体的安全承重,测算天体对行星轨道的摄动效应和阻尼介质中的炮弹路径。他关于光学仪器的三卷论著对望远镜和显微镜的设计有所贡献,他在船舶设计方面的工作则助益于航行。他还提出过一种潮汐理论。他的兴趣并不局限于与数学紧密联系的论题,他也曾就化学、地理学、制图学及其他许多方面撰著文章。

欧拉发表的作品之多,让其他数学家无以企及。他撰写过近 900 篇论文、研究报告、书籍及其他作品。其中的大约半数作于其第二次寓居圣彼得堡期间,那时他近乎失明,凡事皆须向助手们口授。据估算,在 18 世纪后四分之三的年份内出版的所有数学、数学物理、天文学及工程科学的论著,三分之一出自欧拉。他在世时约有 560 篇业已发表,但尚有大量未及刊布。在过去 70 年里,欧拉的《全集》(*Opera Omnia*)以平均每年一大卷的速度持续出版(原有的出版计划如今几近完成)。但除其卷帙繁浩的已发表著作而外,欧拉还留下了大量的通信、个人日记和其他论文,它们仍将在未来许多年内继续吸引学者们的关注。

欧拉是一位单纯的人,从无妒忌之心。正像人们说莱布尼茨那样,他乐见自家的种子在他人的园圃里开花。欧拉仅有个别嫡传弟子,其中并无一流科学家。然而,一如拉普拉斯(Laplace)所言,他是他那个时代所有数学家的老师。就数学而言,18 世纪可以称为欧拉的年代,而他对数学科学发展的影响则不限于此一时期。许多 19 世纪杰出数学家的工作也都直接自他而起。

达朗贝尔(1717—1783)

在 17、18 世纪之交,法国没有数学家可与英国的牛顿或德国的莱布尼茨比肩。不过,在路易十四(Louis XIV)统治后期的相对平庸表现之后,法国数学正迎来其整个历史上最为辉煌的时期之一,而彼时无论英、德均无数学伟才出现。让-勒-朗·达朗贝尔(Jean-le-Rond

d'Alembert),这一法国 18 世纪数学的第一位明星,常与欧拉展开论争。虽然两人中欧拉更具权威,但他也常常借鉴达朗贝尔的想法。然而,数学仅是达朗贝尔诸多兴趣之一。达朗贝尔是启蒙运动中的领军人物,这场国际性的运动在法国尤有特色。



达朗贝尔 1717 年 11 月 17 日生于巴黎,比欧拉年轻 10 岁。他是唐森侯爵夫人(Marquise de Tencin)介朗(Claudine-Alexandrine Guérin),一位当时的著名沙龙女主人和小说家,与一名骑兵军官德图什-卡农(Chevalier Louis-Camus Destouches-Canon)的私生子。他的母亲是一名还俗的修女,由于害怕被送回修道院,便将自己的新生儿丢弃在巴黎圣母院回廊中圣让-勒-朗教堂的台阶上。然而他的父亲设法找到了这孩子,他正被收养在皮卡第,而且他已经有了教名,就是他遭弃处那所教堂的名称。德图什-卡农将他安排在巴黎的工匠卢梭(Rousseau)夫妇的家中。达朗贝尔与他们共同生活直至 47 岁,而他最优秀的科学与文艺作品均成于他们家中。德图什-卡农还照料了达朗贝尔的幼年教育,并在离世之际为他年仅 9 岁的儿子留下了一份数额适中的非工资性收入,供日后生活用。他那不守贞洁的母亲,则同他毫无联系。d'Alembert 这个姓可能是德文 Darenberg 的法文版本,但其意义并不为人所知。

达朗贝尔曾就读于四区学院[有时以其创立者马萨林*命名],这个詹森教派的学校开设经典与修辞课程,亦提供高于一般水平的数学教育。在这一与传统断裂的时期,数学课程以法语而非拉丁语教授。

* 马萨林(Jules Cardinal Mazarin,1602—1661),又译马扎然,法国外交家、政治家,法国路易十四时期的宰相及枢机主教。——译者

该校拥有极好的图书馆,达朗贝尔则对之充分利用。在1735年获得学士学位之后,他开始抗拒宗教性的事业,尽管他的老师劝说他不要如此。经过一段时间法律和医学的学习,他决定以数学家为职业。虽然他几乎未曾受过正式的科学训练,但显然的是,他依赖他自己的努力,不仅对牛顿的著作逐渐熟知,对洛必达(l'Hôpital)与当时的其他数学家特别是伯努利家族学者的著作也同样详悉。

1739年,时值22岁的达朗贝尔向巴黎科学院寄送了他的首份研究通信。此后两年间他又投寄了五份,讨论微分方程的积分方法与阻尼介质中的物体运动。他的这些通信由克莱罗*答覆,克莱罗仅比达朗贝尔年长四岁,却已身居院士。而达朗贝尔则在数次尝试之后,于1741年成功当选院士。

后续的两年间他致力于研究"理性力学"(即今所谓"理论力学")中的各类问题,并出版了他的《动力学》(*Traité de dynamique*)。在这一名作中,他试图将基于牛顿定律的力学这一新式科学加以正规化。在这篇专论的第一部分,达朗贝尔阐明了他自己的运动三定律。一如与他同时代的诸人,他没有简单套用牛顿那种总是以文字而非符号表述的定律。他尝试阐明前两个定律是时空基本理念的推理结果,而这些理念是数学性而非物理性的。但他在这两个定律的论述中已经包含了物理性的假设:他潜在假定了运动守恒,并回避了力的概念。那个以他的姓氏命名的原理可以追溯到丹尼尔·伯努利的工作,它更像是使用牛顿定律的方便的定理,而不是它们实际上的逻辑结果。

1744年,达朗贝尔发表了前作的姊妹篇《流体的平衡与运动》(*Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides*),处理当时流体力学的

* 克莱罗(Alexis Claude de Clairault,1713—1765),法国数学家、天文学家、地球物理学家。在父亲的早期引导下他显露其数学天赋,18岁时即因双曲率曲线的出色研究而破格当选为巴黎科学院院士。通过娴熟的数学方法,他对天体运动的诸多方面展开研究,特别是在月球运动轨道、哈雷彗星路径等著名问题上所成甚精。他还曾随莫佩尔蒂率领的探险队前往北欧测量子午线长度,后又首次阐明了地球几何扁率与重力扁率关系的所谓"克莱罗定理"。——译者

主要问题。克莱罗则在同年刊布了一份相竞争的作品。达朗贝尔的续作《关于风的一般成因的见解》(*Réflexions sur la cause générale des vents*),率先于数学物理领域普遍使用了偏微分方程,尽管它基于一些错误假定。这仅是他的方法优于欧拉的诸多案例之一。另一个是他的(错误的)振动弦理论,我们可以在其中看到波动方程在物理学中的首次展现。之后达朗贝尔转入天体力学研究,而这令他在1749年发表了他的大师之作《关于分点岁差与地球章动的研究》(*Recherches sur la précession des équinoxes et sur la nutation de la terre*)——章动是由月球引力导致的一种地轴摆动。在之后的十年,达朗贝尔撰写了一部更为重要的科学著作,即1754到1756年出版的三卷本《关于太阳系的几个要点的研究》(*Recherches sur différentes points importantes du système du monde*)。此书主要致力于月球运动,其撰述则偏重于捍卫他那些针对克莱罗的原创性观点。在多数情形下,达朗贝尔的理论更优,但克莱罗的方法对天文学家而言更为实用。

出身卑微而已居人上的达朗贝尔不想丧失他的地位。只要还在科学院内,他就势必要奋力位居对手之前。不知是偶然巧合还是本性好胜,达朗贝尔似乎总是与其他顶尖数学家试图解决同一问题——起初是克莱罗,后来则是丹尼尔·伯努利和欧拉。他总是担心丧失先机,并由此陷入一种循环:匆忙发表论著,随即引发对他工作的意义与重要性的争论,而这又令他再次草率为事。尽管欧拉才华最高,但这并不意味着其他诸人没有重要贡献,而因为他自顾自地不太关心成果的优先权问题,所以在对他人贡献的致谢方面多少有些疏漏,这就引发了许多怨恨之情。达朗贝尔的恼怒往往情有可原,但他却在无益的争辩中耗散精力,而没有对自己的理论给予应有的阐释。许多他最优秀的思想,在经欧拉发扬后才为世人理解。

达朗贝尔就柏林科学院发布的有奖竞赛提交了一份关于流体力学的研究报告,虽则他的参赛作品被认为是最优的,却未能揽获该奖。达朗贝尔把这一颁奖决定归咎欧拉。两人的关系此前就已

冷淡，现在则进一步恶化。这份研究报告以《关于流体阻尼的一种新理论》（*Essay on a new theory of the resistance of fluids*）为名，于1752年发表。正是在此篇短文中，达朗贝尔以场的形式表现了流体力学的微分方程，并给出了那个流体力学悖论的一种描述。在此问题上，达朗贝尔与克莱罗、丹尼尔·伯努利、欧拉等再度共逐一鹿，而四者中的每位对其他三者都有影响。

尽管达朗贝尔在其他学科方面是一名出色的写作者［据伏尔泰（Voltaire）所言乃当时最出色者］，但他的数学工作却罕有良好展现。达朗贝尔不够注重阐发自己数学思想的一个原因是，他投入了当时更为广阔的智识生活之中。18世纪40年代，他成为以"哲人"为名头的知识分子群体中的一员，参与到当时兴起的对社会与知识标准批判的浪潮之中。在这一轮浪潮中，数学享有盛誉。随着牛顿解释行星运动的成功，人们相信，使用数学模型的理性探索将会让所有知识得到恰当组织，让所有人类事务得到恰当指导。这一重新整合知识并依凭理性行事的运动，以"启蒙"为世所知，而尤盛于法国。它攻击宗教中的迷信，变革法律，随后又抛却既有的风俗。如大多数哲学家一样，达朗贝尔在每日早间和下午工作，晚上则参加各类沙龙。轻巧的体格，加之传神的面容、高朗的语调、交谈的天赋、模仿的才华，让他以欢快和睿智闻名；"这是我的成熟期"，他在47岁最终离开其养父母家时说道。

然而，启蒙运动不尽是侃侃之谈，其最坚实的成果之一便是那部70卷的《百科全书》（*Encyclopaedia*），该书由狄德罗（Denis Diderot）于1745—1772年编撰。达朗贝尔为这一巨著撰写了那篇重要的导言，并在其中总结了他对全体知识的统一性观点。这份导言对于《百科全书》的成功贡献极大，而多缘于此，达朗贝尔于1754年入选法兰西语言文学学院（Académie Française），这是法国的科学院在文学领域的对应

机构。18 年后，他当选这一尊崇之所*的常务秘书，其职责之一是在有院士谢世时为其撰作颂词。尽管他勤于职守，但在其任事期间，法兰西语言文学学院并未在文学方面产出一二可观之作。

达朗贝尔也曾做过一段时间《百科全书》的科学编者，并撰写了许多数学性的条目。他将数学主题分作三大部分：纯粹数学、混合数学与物理数学。纯粹数学包括算术与几何；混合数学包括力学、光学、声学、气体学，以及猜度术或称机会对策**；物理数学则是将数学计算应用于实验并试图推论出类似于几何真理的物理学结论。

后来，《百科全书》的学者间产生了裂痕，一方是以狄德罗为首的唯物主义者，另一方则是伏尔泰领导的更为温和的派别。狄德罗偏向生物学，因此他臆测了一个荒唐的伪数学基础，并谴责通常的数学"不切实际"。达朗贝尔支持伏尔泰，并在 1758 年断绝了与《百科全书》的联系。在 18 世纪 60 年代，知识风潮不再青睐数学，达朗贝尔发觉仅有自己与另一位"哲人"仍对数学感兴趣，此人是概率论家孔多塞***。至 1780 年的 20 年间，达朗贝尔发表了一系列他称作《数学短论》(*Opuscules mathématiques*)的作品，这些杂文涉及各类主题，基本是就他之前所撰加以改订。

达朗贝尔很少出行，仅在 1764 年前往腓特烈大帝宫廷作简短拜见时，离开过法国一次。这位普鲁士君主倾心于许多法国风物。他幼时习得法语，却从未掌握德语。他视路易十四的语言为文雅之辞，而以德语为粗鄙。取得王位后不久，他就在他的朋友伏尔泰影响下计划建立柏林科学院。由于伏尔泰的推荐，国王尝试劝说达朗贝尔来领导该院，但后者辞谢了这一荣聘并举荐欧拉。这一举动使得之前两人间发生的裂隙有所愈合。

---

* 指法兰西语言文学学院。——译者

** 即今日概率论在早初阶段的名称。——译者

*** 孔多塞侯爵(Marquis de Condorcet, 1743—1794)，法国启蒙运动时期最杰出的代表之一，同时也是一位数学学者和哲学家。——译者

除科学论题而外,达朗贝尔也曾对法律和宗教有所撰述。他曾经拜访伏尔泰,并在后者的影响下匿名出版了一本颇具挑衅性的书,在其中他呼吁压制詹森教派和耶稣会士。他与社会哲学家让-雅克·卢梭(Jean-Jacques Rousseau)分歧巨大。他写过音乐方面的作品,特别是涉及作曲家拉莫*关于音乐结构的思想。虽则这类活动与科学关系不大,但却能让我们认识到达朗贝尔的广泛兴趣。

达朗贝尔的一生所爱是朱莉·德·莱斯皮纳斯(Julie de Lespinasse),其表姊妹德芳夫人(Madame du Deffand)的沙龙常为他所光顾。在一次关于侵占某位沙龙成员利益的争吵后,朱莉在达朗贝尔的帮助下开办了她自己的沙龙。当朱莉感染天花之际,达朗贝尔照料她直至康复。1765年,当达朗贝尔自身陷入病痛时,她说服他离开养父母家而迁来与她同居。在接下来的10年间,他的生活围绕朱莉的沙龙开展,而后者1776年的消殒则是残酷一击。当从她的信札中发现在他们共处期间她已经与其他一些男性陷入感情旋涡时,达朗贝尔在悲伤之外又添耻辱。

因为法兰西语言文学学院常务秘书的名衔,达朗贝尔在卢浮宫一间局促而并不凄清的寓所中度过了他人生的最后7个年头。他发现自己已不再能从事数学研究,但那是唯一能引起他兴趣的事务。孤独与苦楚令他对数学本身的未来也悲观视之。虽然如此,他仍尽其所能地支持和鼓励年轻的数学家们。他晚年最受人瞩目的成就,就是帮助拉格朗日(Lagrange)和拉普拉斯的事业起航,他们的力学工作最终与达朗贝尔自己的多有抵牾。对富有天资的弟子们将来成功的期盼,必然给予了他一些满足,即便是他已经知晓他们高效地完结了力学理论。他未能预料到的是,他工作的一小部分——复数的应用会在下一世纪蓬勃发展,并使得数学能打破18世纪思想所设定的边界。

---

* 拉莫(Jean-Philippe Rameau, 1683—1764),法国著名作曲家、管风琴家、音乐理论家。——译者

达朗贝尔于 1783 年 10 月 29 日离世,仅晚于欧拉数周,享年 65 岁。或许他已然活得太久。其他"哲人"多数在他之前辞世,而那些 18 世纪 80 年代仍然在世之人,也不再是曾经兴奋活跃的年轻革命者。他们所获得的政治上的成功并未引发合乎实际的结果。但在很大程度上,如狄德罗所言,他们改变了思考的一般方式,亦或对法国的智识生活产生了有益影响。达朗贝尔的文学作品已经结集出版,而数学著作则未能。

达朗贝尔是一位有着笛卡儿传统的数学家,而非欧拉式的科学家。如他所说,数学的确定性归因于它所处理事物的简单性,而这与他的自然观紧密相关:然而这不仅是一位纯粹数学家的观点,这里还包含了广泛的数学应用。他对概率、寿命期望等等问题抱有兴趣。在其所处的时代,他率先考虑了函数的极限与级数的收敛,几乎是唯一将微分视作一个函数的极限之人,而微积分正是围绕这一关键概念才最终得以理性化。不幸的是,对他的同辈来说,他的概念似乎并不比其他解说微分性质的方案更清晰。最后,他似乎是有记载的首位将时间作为第四维度的想法的人,因为 1754 年他写道,"我早前说过,构想大于三个维度是不可能的。不过,我一位聪慧的友人相信,一个人或可将时段认作第四维度,时间与体积的乘积可能在一定方式上是四个维度的乘积。这一想法可以质疑,但对我来说,仅就其新颖性而言,它就多少有些优点。"而那位聪慧的友人,被认为就是达朗贝尔自己。

拉格朗日(1736—1813)

约瑟夫－路易・拉格朗日(Joseph-Louis Lagrange)因其将分析学和力学予以不可动摇的形式化处理而特别闻名。他将所有的函数都视为幂级数,并尝试将所有的力学都简化为对这种函数的分析,而不使用几何方法。当他逝世时,拉格朗日在所有数学分支都留下了可遵循的



典范、需解决的新问题以及应发展的新技术。波拿巴*将他比作数学科学的“高耸的金字塔”。

18 世纪的都灵，是皮埃蒙特地区的首府，撒丁王国萨伏依王朝的统治中心。朱塞佩·弗朗西斯科·卢多维科·拉格朗日亚（Giuseppe Francesco Ludovico Lagrangia）是都灵政府机关的司库。他的妻子特雷莎·格罗索（Teresa Grosso）是距都灵不远的坎比亚诺小镇上一位医生的女儿，也是富裕的孔蒂（Conti）家族的一员。他们的 11 个孩子多数未及成年即夭折，其中儿子约瑟夫-路易 1736 年 1 月 25 日在都灵降生。虽然家族富裕，他们却过得不好，因为其父在赌博中输掉了大部分钱款。他的儿子最终对未曾获得成为富有闲人的机会表示欣慰，称如果继承了一笔财富，他可能就不会投身于数学。由于他父亲的家族来自法国图赖讷，他自认为是法国人而非意大利人。他的著作以法语行文，他喜用拉格朗日或拉·格朗日（La Grange）这个姓而非拉格朗日亚（Lagrangia），但其终身所说的法语都带有明显的意大利口音，且据达朗贝尔说，他最喜爱的诗人是阿里奥斯托**。

拉格朗日的父亲有意将他培养成为一名律师。他还是个孩子的时候对此规划并无特别反对，但逐渐成熟后则偏爱研习精密科学。在学校里他阅读了欧几里得和阿基米德的著作，并未觉得它们特别有趣，但当他偶然读到一篇英国天文学家、数学家哈雷（Edmund Halley）论证微积分相较希腊数学优越性的文章时，他发生了转变。在那之后，他开始

* 指拿破仑·波拿巴（Napoléon Bonaparte，1769—1821），后同。

** 即卢多维科·阿里奥斯托（Ludovico Ariosto，1474—1533），意大利文艺复兴时期诗人，著有长篇传奇叙事诗《疯狂的罗兰》（*Orlando Furioso*）等。——译者

研究这一科目并获成功,以至于19岁时就已被任命为都灵皇家炮兵学校的数学教授。

1755年,拉格朗日开始致力于当时欧拉等人试图解决的一些等周问题。次年,他将变分法运用于力学,并证明了,就最小作用量原理而言,变分法提供了一个解答动力学问题的一般程序。他向欧拉告知了这些结果,令其大为钦佩,还压下自己的一篇论文不再发表,该文涉及同一主题的某些内容,只是使用较为低级的方法。当时,欧拉正是柏林科学院数学部的主任。在欧拉的提名下当选该院外籍准院士(associate member)之后,拉格朗日曾考虑动身前往柏林,但暂时还是决定留在都灵。他与一些最优秀的学生组建了一个科学研究社团,不久即发展成为都灵皇家科学院。

1759年,都灵科学院出版第一卷研究报告集,拉格朗日贡献了三篇重要论文:一篇关于变分法,另一篇关于微分在概率论上的应用,第三篇则提供了弦振动的一种数学表述,替欧拉解决了一场与达朗贝尔之间的争端——该文表明拉格朗日已仔细研究了牛顿及其他曾论及这一问题的诸人的著作。拉格朗日还向此后的多卷研究报告集投稿,在其中一篇论文中我们首次见到线性变换的本征值的概念。

整个18世纪,欧洲诸科学院都鼓励天体力学研究,往往为具体问题的解决方案提供奖金。其主要原因是,这种科学对航海导航特别有用。1764年拉格朗日曾参与巴黎科学院主办的一次比赛,主题是确定令月球以相对不变的一面朝向地球的引力,他获得了大奖。两年后,他再次拔得头筹,这次是为一个更为复杂的引力问题给出一个部分解,这个问题涉及木星、当时所知的它的四颗卫星以及太阳。

1763年拉格朗日访问巴黎,在此之前他未曾远离故乡。他被待以上宾,不幸的是,他在逗留期间身患重病。在其职业生涯中对其一贯友善的达朗贝尔,认为拉格朗日在都灵未受充分赏识。在达朗贝尔施展影响之后,撒丁王国国王及其臣属做出良好许诺,但此后并无回应,于是达朗贝尔转向柏林,不久,拉格朗日收到来自腓特烈大帝的诱人邀请,腓特烈

大帝表达了“欧洲最伟大的国王”需要“欧洲最伟大的数学家”留驻其宫廷的愿望。我们知道，当时欧拉将要返回圣彼得堡，他邀请拉格朗日到那里与他共事，但拉格朗日拒绝了这一机会，而于 1766 年成为柏林科学院数学物理部主管。前往普鲁士首都之前，他到巴黎再作访问，在一次专门招待他的宴会后再次患病，随后头也不回地离开了巴黎。

次年，拉格朗日与表妹维多利亚·孔蒂(Vittoria Conti)结婚。在回复他的朋友达朗贝尔的询问时，他写道：“我不知道我的估量是好还是不好，或者说，我根本不相信我做了估量；因为我可能会像莱布尼茨那样做——迫使自己反思，可能从未下过决心。我向你坦白，我从未有过结婚的尝试……但现实情形迫使我与我的一位年轻表妹结婚，以照顾我并处理我的事务。如果我忘了告诉你，那是因为在我看来整个事情本身是这样的无关紧要，而不值得麻烦去告诉你。”不过，夫妻感情随着岁月而加深，当他的妻子维多利亚因疾病缠身而于 16 年之后去世时，拉格朗日心碎不已。

对于数学研究而言，拉格朗日在柏林的岁月里成果丰硕。他没有被要求授课，但他几乎每个月都以从概率论到方程论的一系列主题撰写研究报告。1767 年，他发表了重要论文《论数值方程的解》(On the solution of numerical equations)，四年后向柏林科学院提交了以《关于方程代数解法的研究》(Reflections on the algebraic resolution of equations)为名的另一篇研究报告，其中的观点已预见了伽罗瓦(Galois)理论。在数论上，拉格朗日解决了一些由费马(Fermat)提出的问题，其中就包括那个著名的定理——每个正整数是四个整数的平方和。他继续对行星间的引力相互作用进行考察，于 1772 年以一篇关于日、月、地之间引力的研究报告从巴黎科学院获得他的第三个大奖。1774 年和 1778 年他两次再获大奖，第一次是有关月球运动的工作，第二次是关于彗星摄动的一项研究，这使得他获得的大奖总数多达五个*。

---

* 原著此处为“四个”，显误。——译者

在其身居柏林科学院的20年间,拉格朗日致力于他称之为"分析力学",即对于刚体运动的微积分应用的研究。他的结论以《分析力学》(*Méchanique Analitique*)为名被整理成书,于1788年发表。兹引前言如下:

> 我们已经有了力学问题的各种专论,但这一计划完全是新的。我给自己建立了这样一个问题:把这门科学[力学]以及解决与之相关问题的技术,简约为一般性的公式,将它们作简单的展开,即可给出解决各个问题所需要的方程……在这项工作中将无图可寻。我在其中详细阐述的方法既不需要建构,也不需要几何或力学的推理,而仅需要遵从于一个统一和规则的程序的代数[分析]运算。那些喜欢分析学的人们将会乐于看到力学成为其一个新的分支,并且我将不得不扩展其领域。

《分析力学》是拉格朗日的杰作,按哈密顿(Hamilton)的说法,它是一篇科学的诗赋。约在1774年,有传言他会返回意大利,到都灵抑或那不勒斯,成为新设立的科学院院长,但最终没有结果。1780年左右,拉格朗日开始患抑郁症,并在多年里对数学普遍失去兴趣。"我开始感到我的惰性在一点点地增加,而且我不能说从现在起的10年内我还会再搞数学",他写信给达朗贝尔说,"而且似乎对我来说,矿藏已然太深,除非发现新的矿脉,它将不得不被废弃。"年长他18岁的达朗贝尔回信说,"看在上帝的份上,别放弃工作,你最为让我操心。再见,也许是最后一次了。为世界上最珍视你、最以你为荣的所有人保留一些记忆吧。"

1786年,腓特烈大帝崩逝之后,一种对科学的漠视态度和对外国人的怨忿情绪在柏林弥漫开来,同时,意大利王室更加努力地吸引拉格朗日去他们的宫廷。不过,最终劝说他在过了非常成功的20年之后离开柏林的,是一份来自巴黎的邀请。1787年7月,他成为巴黎科学院的外籍资深院士,而自1772年起他已成为其外籍准院士。在法国首都,他处

处领受卓越待遇，卢浮宫中的套房为接待他而预备。在社交与科学聚会上他常常受到欢迎。然而，他的抑郁症更为严重，人们都见过他向窗外长时间张望。他对其友人和同事说，数学对他来说已不再重要。

1792 年拉格朗日 56 岁之时，迎娶了他的第二任妻子勒莫尼耶（Renée-Françoise-Adelaide Le Monnier），他的一位友人兼同事的妙龄之女。他的新娘专情于他，并且据说她帮助拉格朗日逐渐重获他对数学和生活的普遍兴趣。不过，第二次婚姻如第一次那样未得子女。

在革命时期，拉格朗日设法保持政治中立，虽然他由革命政府发放退休金，并任职于负责建立重量与度量标准的委员会*——公制系统因该机构才得以出现。在拉普拉斯的传略中，我们将对该委员会有更多了解。1793 年一批法律生效，这意味着将逮捕生于敌国的外国人并没收他们的财产，但拉格朗日被特别豁免。在接下来的几份传略中我们将看到，学院纷纷关闭，但由于接替它们的新机构的建立，不论哪个政府掌权，拉格朗日总能找到职位。1795 年他被任命为新设的巴黎师范学校（后改称巴黎高等师范学院）的数学教授，该校关闭后他又成为巴黎综合理工学院的教授。他为学生撰写了两部微积分教材，试图组织和系统化这一套尚难以理解而不甚明晰的方法。

拉格朗日以他的文雅举止和处世圆滑著称。外表上，他身材中等，体格微瘦，眼睛淡蓝，面色苍白。而性格上，他紧张而胆小，厌恶争议，为避免于此，他允许他人攫取他的工作成果。在柏林科学院，他深受国王宠爱，而不像欧拉那样。当他开始在巴黎定居时，他为玛丽－安托瓦内特（Marie-Antoinette）王后所钟爱，尔后他设法与法国大革命期间的领导人保持良好关系，后来继续受波拿巴青睐而被频繁征询。他被任命为参议员，帝国的伯爵，以及荣誉军团高级军官。在其古稀之年，他开始为他的杰作《分析力学》第二版进行修订及扩展。然而，长时间的工作削弱了他的体力和精力，他常常一阵昏厥，情况越来越糟。他于

* 即著名的度量衡标准委员会。——译者

1813 年 4 月 11 日逝世，享年 77 岁。他的遗骸被安置于先贤祠，以表彰他对科学的贡献。

对于其他数学家的工作，拉格朗日保持信息畅通。他与达朗贝尔经常通信，他们之间的亲密友谊，不应掩盖其想法之间那引人注目的分歧。达朗贝尔的数学作品有着现实主义的特质，这将他与牛顿和柯西(Cauchy)相连。而另一方面，拉格朗日在他的青年及晚年的某些时候，表现出一种诗意，令人想起莱布尼茨那富于创新的勇气。

我们之后将会看到，拉普拉斯与拉格朗日在许多方面完全相反，他对拉格朗日完全不在意于他有清晰的印象。在回复一封拉普拉斯关于其自身工作重要性的相当自负的来信时，拉格朗日写道："我一直将数学看作是娱乐而不是施展雄心的对象，我可以向你保证，我本人对他人著作的欣赏要远多于对我自己的那些作品，它们总是令我不甚满意。由此你将看到，如果你是用自身的成功来免遭嫉妒的话，我则还是用自己的性情来做到这一点。"另一个故事则是，某日拉普拉斯邀请拉格朗日赴宴，拉格朗日以嘲讽的口气问道："有必要穿参议员的礼服吗?"除拉普拉斯外，众人都感受到其中的敌意。虽然拉格朗日总是与他从未一晤的欧拉相左，但在前辈数学家中，正是欧拉对他影响最大。这就是为什么对其工作的任何研究都必须事先或同时检查欧拉的工作。但即使是在这一伟大的模范面前，他仍保有一份原创性，这使得他能批评他这位前任的工作，但最重要的则是对这位先辈的工作进行推广、系统化和深化。

蒙日(1746—1818)

法国大革命期间开始的教育改革，对法国未来的科学发展有着深远影响。加斯帕尔 · 蒙日(Gaspard Monge)在该运动中发挥了主导作用，尤其是创立巴黎综合理工学院，这一辉煌的创建，后来激励了苏黎世联邦理工学院、麻省理工学院及其他伟大的机构。他亦协助制定公制系统，而这已通行世界。主要由他创立的画法几何依然在实践上保



有重要性。在纯粹数学领域,他或许应被视为微分几何之父。

雅克·蒙日(Jacques Monge)是一名在勃艮第金丘葡萄酒产区中心的博讷经营的小商贩。他原籍萨瓦,而妻子让娜[Jeanne,娘家姓卢梭(Rousseau)]则是勃艮第本地人。他们的长子加斯帕尔出生于1746年5月9日。尽管他们境况一般,这对夫妇作出格外努力,以确保他们的三个儿子能接受良好的学术与实践教育。加斯帕尔在三人中最为聪慧,后来常常动情地说起父母为他付出的牺牲。

蒙日的教育从博讷的奥拉托利教会学院开始,在16岁时他来到更有权威的里昂三一学院,尽管年纪尚小,他却被要求在那里教授物理。他自己或许已是一名奥拉托利教徒,而1764年夏天他回到博讷看望家人时,作为练习,他和一位朋友为其家乡绘制了一张平面图。当时梅济耶尔皇家军事工程学院的副院长正好在博讷,他看到此图,为其精良所震惊,便着手安排蒙日进入这一久负盛名的机构。该学院于1748年为有意进入陆军工程兵团的贵族子弟们设立,每年招收10名学生,接受为期两年的强调数学和物理的科学和实践训练课程。

1765年,蒙日获任制图员和技术员的中级职位,被期望制作防御工事的平面图和模型。然而,当他被要求解决纵向射击中的一个实际问题,具体来说是设计一个能保护某个位置不在敌人视野与火力范围内的防御工事,他用一种快速程序取代了之前使用的费力方法,作为其基础的原理很快以画法几何之名为人所知。在其最简单的形式中,这是一种用平面正投影呈现三维物体的技艺,通过这一方式,我们可以通过一栋大楼的平面图和立视图将其想象出来。

这一成功使得蒙日首先在1769年成为数学教授的助理,其后不

久,又在工程学院获得两个更为高级的教职,一个是数学,另一个是实验物理学。在这两份偏向实用目的的工作上,他证明了自己是一名有能力的数学家和物理学家,一名有才干的绘图员,一名熟练的实验员,和一名一流的教师。直到20年后他最终离开学院,他施展的影响力帮助许多未来的工程人员走向成功的职业生涯,并给予了整个工程兵团坚实的技术培训和显著的科学提升。学校的管理者认可他的能力,并为他争取到皇家数学和物理学教授的官方头衔和相应薪酬。

在开展这一极为成功的事业的同时,蒙日开始进行研究。他利用工程学院优越的图书馆学习无穷小微积分*、解析几何和变分法。他年轻时的研究多种多样,但表现出几个特点,在他后来的工作中也很突出:强烈的几何感,对实际问题的兴趣,极强的分析能力,以及对一个简单问题同时进行分析、几何与实践等多方面的检查。

正是在此期间,蒙日发展出画法几何。画法几何的一些元素很早就出现在他的教学之中——他对作图程序的熟悉此时正当其用,加上涉及的几何,使得他能够做出必要的综合。他将画法几何的基本原则系统化,并将之应用到工程学院研究的各类图形问题之中,尤其是从防御技术中产生的问题。在这一阶段,他基本上只是将早期知识整合并有理化,而没有什么真正原创的工作。不过,由于他的方法因其军事价值被列为机密,直到很久以后才获发表,主要体现在他1799年的教科书《画法几何》(*Géométrie descriptive*)之中。

同时,为让自己出名,并使自己的工作得到最高水平的讨论,蒙日曾向巴黎科学院提交了至少四份研究报告。其中最为重要的是关于偏微分方程理论的一份,多年来他保持着对该研究领域的兴趣。1777年,31岁的蒙日与一名20岁的寡妇玛丽-卡特琳·哈特(Marie-Catherine Heart)成婚,而她带来一笔丰厚的陪嫁。她生育了三个女儿,其

---

* 此为微积分严格化以前的称谓,主要是处理无穷小量的微分计算与积分计算的技巧。——译者

中两人均嫁与国民公会的前成员。某位熟悉蒙日的人士对其外表做出这样的描述：

他身材高大；他的体格力量在其大块肌肉中自有体现，正如他的道德力量为其极为深邃的眼睛所描绘一样。在他狮子般的宽广面庞上，一双硕大而活泼的眼睛在位于又宽又高的额头上端的黑色眉毛之下闪亮，额头上的皱纹则是他高超智力水准的符号。他一发言，就好像让人看到了另一个人……一种新的火焰在他的眼睛里燃烧，他的容貌变得生动活泼，他的脸上变得振作激昂，似乎看见了面前由他的想象力创造的东西。

在接下来的几年里，蒙日的时间和精力大多投向物理和化学。他曾在工程学院设立一个设备精良的化学实验室。他于1772年当选为巴黎科学院的助理院士（adjoint member），不得不定期留驻巴黎，而1780年他又获命为水力学教授——一个部分在巴黎、部分在工程学院的职位。三年后，他就任海军军校学员的主考官，至此时他终于同工程学院脱离关系[他的弟弟路易（Louis）11年来已在那里教授他的某些课程]，他已在此度过极富成果的20年。在这一新职位上，他指导了一些法国的军事学校——实际上是这个国家中提供有价值的科学教育的仅有机构，1786年他还针对教学体系实施了重要改革。他的职位也让他得以参观工厂、矿山等地，从而获得冶金和其他技术的知识。在接下来的五年里，他冬季常在巴黎，但到夏天就避居阿登。

到1789年大革命开始之时，蒙日已成为最广为人知的法国科学家之一。作为巴黎科学院的一名活跃的成员，他在数学、物理和化学领域树有声名。特别是，他是接受拉瓦锡（Lavoisier）新化学理论并协助这位伟大化学家进行经典的水的分解与合成等试验的第一人。此外，他在海军学校的教学改革，让他为后来在革命时期努力重建科学和技术教育做好了准备。

虽然蒙日从大革命爆发伊始就是其坚定支持者，但起初他的政治

态度保持着相当的谨慎。如当时许多其他法国科学家一样,他成为一名共济会员。他也曾加入几个革命社团和俱乐部。不过,他的大部分时间都作为海军军校学员主考官投入视察旅行,以及作为科学院院士尽其职责。同年长其十岁的拉格朗日一样,他也成为负责改革重量与度量标准的委员会一员,不过时间较晚。

1792 年 8 月君主制倒台,人们创立了新政府,以继续同旧政权的国外拥护者们对年轻共和国的施压作艰苦卓绝的斗争。蒙日在政治上变得更为活跃,并被任命为海军部长。虽然在此方面能力并不出众,他的工作仍显示出他协调各方面以努力确保国家的生存与独立的愿望。然而,他被有些人认为在政治上过于温和;他被多方攻击,为应付持续不断的斗争而身心俱疲,几个月后他选择了辞职。虽然他曾与雅各宾派共事,却从来没有与任何特定派别结盟。即便如此,他也处于被逮捕并送上断头台的危险之中,因为这一时期太多这种事情。

蒙日是一名坚定的共和主义者和热忱的爱国者,随时准备以其全部精力、才能和经验服务于国家。在一段较短时间内,他曾重新开始其学术工作,但 1793 年 8 月学术机构和大学被查禁以后,他的活动就处于当局特别是公共安全委员会的直接控制之下。当时,弹药是一项紧缺。从 1793 年 9 月至 1794 年 10 月,他参与军备委员会的工作。他曾同化学家贝托莱(Berthollet)、数学家范德蒙(Vandermonde)一起就不同类型钢材的制造撰写一书。他起草大量有关武器制造的法规,特别是在巴黎的时候,并收集大炮制造的技术文献。他撰写手册,并教授"革命课程"。他亦涉事于硝石的提取和精炼,以及巴黎大火药厂的建设和运营。此外,他还曾参与研发为军事目的设计的气球。

自 1794 年 7 月罗伯斯庇尔(Robespierre)与雅各宾党人政权倒台至 1795 年 10 月,法国由国民公会*统治,而其激进元素得以清除。但

* 此处原文为 the Revolutionary Convention,实际指国民公会(Convention nationale),1792 年 9 月成立,1795 年 10 月解散。——译者

到 1799 年波拿巴经雾月政变掌权之前,都未曾有稳定的政府*。关于这一过渡时期的政治色调,曾有过不少判断,而以负面居多,但历史学家们的普遍观点是,无论督政府的缺点如何,现代法国社会的机构在此时开始出现,尤其是在教育领域。

蒙日对于当时正在讨论的教育改革方案尤为积极。他在工程学院和海军学校的经历表明了他对科学和技术教学革新所持有的特别兴趣。在基础层面,他曾为巴黎的技工和工人学校起草了一套规划,为国民公会采纳仅一天,翌日即遭否决。在更为高等的层面,他确信创立一所单独的国立学校以训练民用和军事工程师是有价值的。巴黎综合理工学院由此设想而形成。这一伟大的机构自 1795 年 6 月起开始运作,而在几个月之前它已作为中央公共工程学院而诞生。从渊源上说,它被认为是已被暂时查禁的路桥学院和工程学院的继承者。它意在公共服务和军事工程相关主题上提供为期三年的基础训练。虽然有意令毕业生成为工程师而服务国家,数学科学却占据了计划课时的最大部分。物理学起初作为一门数学分支,系统地教授给那些素质优良、严格精选出的学生。成立后不久,巴黎综合理工学院就因其卓越的教授、严格的训练、高难的考试和优秀的教材,成为高等学府的典范。在很长一段时间内,它是法国最负盛名的教育机构,并作为世界上最好的数学中心而享有声誉。

巴黎综合理工学院从开始就是成功者,但它的姊妹机构巴黎师范学校却有一段更为曲折的历史。这是一所据国民公会法令于巴黎设立的国立学院,以帮助修复崩溃的高等教育体系。它的使命是培训教师而非军事工程师和军队职官,且与此前学校的结构中固有的专门化相反,其领域涉及当时知识的所有分支。虽然授课者包括拉格朗日、拉普拉斯和蒙日等科学家,但学生大多准备不足,不到一年它就被关闭。在这一短暂期间里,傅里叶(Fourier)是那里的一名学生,并记录道:"蒙

* 1795 年 11 月至 1799 年 10 月,法国由热月党人掌权的督政府执政。——译者

日声音洪亮,他活跃、聪慧,且很有学识……他擅长数学、物理和化学;他讲授的科学知识极为怪异,而他则尽可能将其阐释明晰。有人甚至发觉他讲得过于清楚,更确切地说,是他的方法不够快捷。”

巴黎师范学校于1810年重新开张,又于1822年再次关闭。不过,当它于1826年第三次开张以后便未再关闭,并开始与巴黎综合理工学院相竞争。这两所精英院校计划成为小学和中学教育、中专和医药学校体系的顶峰,在此,科学和系统性知识将在很大程度上取代经典成为基本科目内容。这些新事物的实际效果从长远来看是决定性的,科学的活动中心从其17世纪以来的家园——科学院,转移到高等教育机构,在那里培养起研究的精神。科学家则转而成为教师和教授。

蒙日还担当别种任务。自从科学院被关闭以后,他加入巴黎科学普及学会(Société Philomatique),一个在大革命前设立的科学学会,它兼容并蓄,且不受国家管控。与科学院不同,该学会的目标是在其公报上快速发表研究成果。不过,科学院作为法兰西研究院(Institut de France)的第一分院,其重建的准备工作很快着手进行。蒙日积极参与为组办此事而召开的会议。尽管与其前身的构成方式存在显著差异(尤其是初建之时),通常仍以巴黎科学院指称法兰西研究院的第一分院似无不妥之处,而该机构于1816年再次恢复原名。起初未设常务秘书,但全职受薪人员于1802年恢复。法兰西研究院一开始在卢浮宫办公,但1806年它越过塞纳河迁至四区学院大楼,在此延续至今。

蒙日还参与艺术委员会的活动,该委员会负责保护法国的文化和艺术遗产。但是,就在其活动似乎正要恢复正常时,他受召承担新的职责。他与其友贝托莱一道被征募而服务于意大利科学和艺术委员会。波拿巴正发动一场在他看来是从暴政中解放意大利人民的战役,并指派了该委员会的任务——为胜利之师挑选绘画、雕塑、手稿、科学仪器和其他贵重物品,从意大利转运到法国,作为战争花费的“赔偿”。在这一工作的过程中,蒙日游访了许多意大利北部和中部的城市,其中包括罗马,在那里他遭人排斥,并为他遇见的无知和贫困而难过。他与对

其印象深刻的波拿巴的关系日渐友善。1797 年 10 月底,蒙日受托向国民议会宣读坎波福尔米奥和平条约,他在庆典上报告说,波拿巴的下一场战役将是“解放”英格兰。

他一返回巴黎,便在其原有职位外被任命为巴黎综合理工学院校长。他的家人希望他能在家中多呆些时间。但是波拿巴决定派军远征埃及,并坚持要求蒙日参加。不久蒙日被任命为埃及研究院院长,这是远征军的文化支部,在某种性质上可谓法兰西研究院的前哨,而他则在该机构开展的各种科学和技术项目中发挥重要作用。在对苏伊士地区的短暂访问、灾难性的叙利亚远征及返法回程中,他均陪同波拿巴而行。这三年半期间,他在家乡仅逗留了很短时间。对海市蜃楼等自然现象的观察,对埃及工业和农业方法的研究,给他带来一些科学兴趣。除此之外,蒙日致力于完成他具有影响的作品《几何分析的应用》(*Application de l'analyse à la géométrie*)。

埃及战役后他返回巴黎,继续承担他在巴黎综合理工学院的职责,但波拿巴决定要进一步用其才能。蒙日仍然忠于波拿巴,即使波拿巴后来自封了皇帝,与蒙日的共和国信念和革命信仰相悖。执政府时期*,蒙日被任命为终身参议员,1804 年被授予荣誉军团高级军官职位,1806 年担任参议院主席,1808 年被封为佩吕斯伯爵,等等。

蒙日只好在家庭、巴黎综合理工学院、法兰西研究院和参议院之间奔忙。他继续在巴黎综合理工学院授课,并保持对学生进步的认真观察。波拿巴没有听从蒙日和他人的建议,他按军事需要重组了这个机构,故而它变得有点像美国西点军校。此时蒙日已年近六十岁。虽然其原创科学工作的产出已经开始衰退,他笔下源源不断的著作仍确保了他在法国乃至欧洲其他地方的始终强大的科学影响力。

幸运的是,蒙日因太老而未卷入波拿巴的俄国战役。震惊于 1812

* 1799 年 11 月 9 日,拿破仑发动雾月政变,派军队控制了督政府,宣布成立执政府。执政府持续到 1804 年 11 月拿破仑称帝为止。——译者

年拿破仑大军的失利，他没有参加1814年4月3日参议院投票废黜皇帝的关键会议。1815年，在“百日王朝”期间，他曾重建与波拿巴的联系，甚至在滑铁卢战役后见过他几次。作为在大革命第一阶段积极活动的共和党人，以及后来波拿巴的忠实拥护者，他在复辟的波旁王朝统治下注定受苦。1815年10月，他因担心其自由而离开法国好几个月。1816年3月他返回巴黎，几天后即被法兰西研究院开除，之后又在政治上受到其他方式的骚扰。随着身体、精神和智力的日益衰竭，两年后，蒙日于1818年7月28日去世，享年72岁，只比拉格朗日晚5年。当巴黎综合理工学院的师生们表示希望获准参加他的葬礼时，路易十八（Louis XVIII）拒绝了他们的请求。然而，次日他们全体游行至公墓，并在他的墓碑前献上花圈。

拉普拉斯（1749—1827）

蒙日的直觉思维，同他的朋友皮埃尔－西蒙·拉普拉斯（Pierre-Simon Laplace）的那种更具分析性的思维十分不同。两位数学家相得益彰，一起成为法国下一代数学家的老师，他们中的许多人曾在巴黎综合理工学院受训，上过拉格朗日和蒙日的课程，并由拉普拉斯考核。虽然拉普拉斯也被认为是概率论的创始人之一，但令其成名的乃是天体力学。拉普拉斯被认为是法国黄金时代最著名的科学家和所有时代最有影响力的科学家之一。



博蒙昂诺是位于下诺曼底，距离蓬莱韦克不远的一个小镇。皮埃尔·拉普拉斯（Pierre Laplace，或 Pierre La Place）在那里做苹果酒生

意,也是当地教区的一名管理人员。他的妻子玛丽－安[Marie-Anne,娘家姓索洪(Sochon)]的娘家是附近图尔热维尔的小康农户。他们的第二个孩子皮埃尔－西蒙,出生于1749年3月23日。7至16岁间,他在其伯父路易·拉普拉斯(Louis Laplace)任教的当地本笃会学校上学。除了这位对数学感兴趣的伯父,在他父母两边的亲属中都没有智力出众者的迹象。

拉普拉斯的父亲希望他能够在教会做一番事业,1766年这个年轻人进入卡昂大学接受神学训练。然而他的数学兴趣已经显露出来,他的老师也鼓励他在数学方面发展。1768年,在他19岁时,他带着一封给达朗贝尔的推荐信去了巴黎。我们经常听到的故事版本是,达朗贝尔如何给拉普拉斯出了很多数学难题来测试他的能力,而这位年轻人过一夜便将它们解决。对他刮目相看的达朗贝尔利用自己的影响,为拉普拉斯在巴黎的军事学校谋得一份教学员们初等数学的职位。这份工作持续了七年。

拉普拉斯当前的目标是成为巴黎科学院院士。于是,他开始向常务秘书提交研究论文,秘书后来写道,他从来没有在这么短时间内收到这么多主题多样而艰深的重磅论文,作者竟然如此年轻。拉普拉斯1771年首次被提名参选,经历了两次失败以后,他于1773年3月成为助理院士,年仅24岁。

拉普拉斯对数学的第一项贡献与使用积分学解差分方程有关,但他的主要兴趣在别的地方。他对牛顿的工作推崇备至。1774年,智力上已经足够成熟的他给自己定下完善牛顿世界图景的任务。其最为根本的问题即太阳系的长期稳定性,即便今日亦是一个悬而未决的问题。拉普拉斯研究天体力学的突出问题,在1783年和1786年之间一系列精彩的研究报告中,他解决了其中很多问题。例如,已经观察到木星轨道呈收缩状态,而土星的轨道在扩大;他阐明了轨道偏心率会自我纠正,而行星的平均运动是不变的。他还解释了月球环绕地球的加速度,卫星对它所环绕行星的运动产生的摄动,以及彗星的轨道。

在那些高产的年份里，拉普拉斯与拉瓦锡合作进行了很多重要的物理与化学实验。他研究了巴黎的重要统计数据，并用概率方法来估计法国的人口。除了在军事学校教书，他还被任命为炮兵学校学员的主考官；他的第一批考生之一即是未来的皇帝。值得注意的是，只比他年长三岁的蒙日此时是海军学校学员的主考官，他们在各自职位上获取的经验，给予他们后来合作规划巴黎综合理工学院良好助益。

拉普拉斯这段时间的私人生活鲜为人知，但有明显迹象表明，达朗贝尔已开始对他的门徒在理性力学领域接替其工作的方式耿耿于怀。虽然拉普拉斯拥有其他学科的广博知识，他在科学院中对什么问题都要发表意见，而且已经有了傲慢的名声，这使得他在同侪中不受欢迎。一位造访巴黎的人写道，"我见过拉普拉斯很多次，他很亲和，是一个伟大的几何学家，但同时又极度认真、急躁，除了他自己，谁的话他都听不进去。"

1788 年，拉普拉斯与家族来自贝桑松的玛丽 - 夏洛特（Marie-Charlotte de Courty de Romanges）结婚。她比拉普拉斯年轻 20 岁。他们有 2 个孩子，儿子夏尔 - 埃米尔（Charles-Emile）从军，官至将军，女儿索菲 - 苏珊（Sophie-Suzanne）嫁给了贵族，但在 25 岁时死于分娩。

将法国不同地区使用的混乱的度量衡合理化，是一个已经讨论多年的想法。1790 年 5 月，革命政府指派科学院承担对改革作出建议的任务。拉普拉斯与拉格朗日、蒙日一起，服务于被委任处理该问题的委员会。他们对长度、面积、体积和质量单位提出建议，以十进制作为细分和倍数。他们还提出在钱币、角度和日历上也运用十进制数制。正是根据拉普拉斯的建议，长度的基本单位被命名为米。革命历法*只持续了很短的一段时间，角度的十进制没有被普遍接受，但其他公制单位逐渐被世界各地采用。

---

* 即法国共和历，是法兰西第一共和国时期采用的历法，以共和国建立之日（1792 年 9 月 22 日）为历元，1805 年 12 月被拿破仑一世废止。——译者

1793 年,就在学术机构纷纷关闭之前,拉普拉斯和其他一些人由于政治立场被科学院开除。为了避开恐怖时期,他做了预防措施,将家人从巴黎转移到附近的默伦小镇。到了 1795 年,危险似乎已经结束。热月党人政权已经把公制系统、巴黎天文台,以及所有涉及航海及官方天文学的事务置于新经度局管理下。在资金充足的经度局任职被认为是有了一份全职工作,收入很高。拉普拉斯正式担任其成员,常常将它的会议当作论坛来展示相应的论文,并频繁在其期刊《法国天文年历》(*Connaissance des temps*)上发表文章,而这本期刊原来只是一本航海天文历。

1796 年,拉普拉斯发表了他第一部主要作品《宇宙体系论》(*Exposition du système du monde*),这是一部科学经典。其中,他讨论了早先由哲学家康德(Immanuel Kant)提出的星云假说(认为太阳系由一团旋转的气体凝聚而成),尽管没有数学支撑。拉普拉斯是否知道康德的假说并不清楚;他很少列出致谢。此外,在拉普拉斯对球体周围引力场的分析中,他被一些人认为预见到了黑洞的概念,其特点很久以后才在爱因斯坦(Einstein)的广义相对论中被推导出。《宇宙体系论》包含了以下关于拉普拉斯总体观点的陈述:

> 代数上的分析让我们把注意力集中在抽象的组合上,很快让我们忘记了(我们研究工作的)主要对象,只有到了最后我们才回归最初的目标。但是放任自己去进行分析运算,人们会被引领去认识这一方法的普适性,以及通过机械步骤将推理转换为结果的无法估量的优越性,而那些结果用几何方法往往是不能得到的。分析的繁殖力如此强大,它足以把特定的事实真相翻译成这种通用的语言来让你看到,正是从它们的表达中,出现了一大批未曾预期的全新事实真相。没有其他语言能够具有这种精美,这种精美产生于一长串一个连着一个的表达,而且这些表达统统源自一个基本的思想。因此,相信其优越性的本世纪的几何学家[数学家],让自己主要投身于扩大其领域并推后其界限。

支持拉普拉斯理论的数学论点，被记载在他的杰作——不朽的五卷本《天体力学》(*Traité de mécanique céleste*)之中，于1799年到1825年陆续出版。他完成了牛顿在这一领域的工作，并拓展了拉格朗日的理论。虽然牛顿相信神的干预对太阳系的周期性"复位"十分必要，但拉普拉斯认为，万有引力定律蕴含了太阳系的长期稳定性。当波拿巴发现拉普拉斯浩繁的著作没有提到上帝是宇宙的创造者时，据说拉普拉斯回答道，"先生，我没有必要做那个假设"，而当波拿巴对拉格朗日重复这一问题时，后者说，"啊，不过这是一个很好的假设。它解释了这么多东西。"

虽然拉普拉斯研究的主要领域是天体力学，他也对概率论和统计推断理论作出了重要贡献。在他1812年的《概率分析理论》(*Théorie analytique des probabilités*)中，他用一篇精湛的导言，总结了所有当时在概率及其应用领域已知的东西。这本著作介绍了后来被称为拉普拉斯变换的技术，一个简单而优雅地求解积分方程的方法。拉普拉斯的一些概率论方面的贡献是从天文学问题中衍生出来的，例如应用于彗星轨道倾角的中心极限定理。拉普拉斯认为，通过概率，数学可以对社会科学产生影响，并提出了多种应用。他也和他的同侪院士拉瓦锡一起研究过几个物理学问题，包括热传导和毛细管作用。但他被物理学家所首先熟悉的是他的势的概念，这个概念在如万有引力、电磁学、声学和流体力学等广泛领域内的价值无法估量。

拉普拉斯认为自己是法国最好的数学家；他的同事们认为，虽然很可能如此，但稍稍谦虚一点不会有什么不妥。如果有什么随着他的年龄增长，那就是他的傲慢。事业成功之后，他便不顾其父母和姐姐。拉普拉斯的虚荣和自私是难以否认的；他对他青年时期的恩人和他的政治伙伴们的作为是刻薄和忘恩负义的，而他对那些相对不知名人士成果的侵占看起来也是确实的。

他去世后，一个匿名的评论家认为拉普拉斯逊色于欧拉和拉格朗日，但写道，"拉普拉斯的天才就像是一把完美的锤子，它打破了纯粹

数学的障碍,但正如那件有用的工具一样,它既没有终结什么,也没有给结局带来美丽……尽管如此,拉普拉斯做过的研究工作常常显示出所征服困难的标志:有时做法很笨拙,有时很不直接,但是仍然会达到他的目的,并将困难征服。”

从18世纪末期直到进入19世纪,拉普拉斯主导了巴黎科学院,让年轻的同事仍接受他对科学的喜好和确定性的思想。当被压制的科学院开始恢复,作为法兰西研究院的组成部分时,他于1795年12月,在组建会议上被选为新科学院的副院长,5个月后就任院长。这个职位可不只是个敬称;这确保了他是很多制定政策、预设决议的委员会的成员,经常还是主席。拉普拉斯凭借他的能力和热情全身心地投入到这一政治工作中。他同时主持着法国经度局。巴黎师范学校1795年短暂开放时他曾任教于此,1800年在巴黎综合理工学院章程的制定中他又发挥了作用,当时他在那儿做毕业考试的考官。拉普拉斯的教学以“急速”著称,而在他的著作中,则以频繁使用短语“很容易看到”出名,他借此在阐述中跳过步骤,弄糊涂了他后来的一些读者。他手头似乎有整套精密科学的文献;然而在他自己的作品中,他经常忘记致谢其结果引用的来源,让人感觉这些似乎是他自创的,但其实不是。

这一时期,杰出的科学家日渐被征召承担各种形式的公职。拉普拉斯是最为突出者之一。1799年,当时的第一执政波拿巴任命他为内政部长,但他在这一职位上并不成功,6个星期后,拿破仑以其弟吕西安·波拿巴(Lucien Bonaparte)将他替换。波拿巴被流放到圣赫勒拿岛的时候,这位前皇帝说道:“作为第一流的数学家,拉普拉斯很快显露了自己只是一个平庸的管理者……拉普拉斯永远不能抓住问题实质,他到处找玄机,只有一些不确定的想法,简单来说就是把无穷小分析的精神带入了管理工作。”即使如此,在帝国治下,拉普拉斯成为参议员,执掌议长职位,这让他大富大贵。他被帝国封爵,并被授予法国最高荣誉,荣誉军团大十字勋章和留尼汪勋章。在巴黎科学院有一幅乌东(Houdon)给他画的半身画像。

从 1806 年起,拉普拉斯将大部分时间花在他那位于阿尔克伊的庄园上,大约在巴黎以南 8 千米处。蒙日的朋友贝托莱有一座相邻的庄园。两位参议员都是有钱人,也都是杰出的科学家。他们在阿尔克伊组建了一个小型的、非正式的科学学会,阿尔克伊学会早期做了很多优秀的研究工作。巴黎综合理工学院和其他地方年轻有为的科学家被鼓励参与进来。在职业生涯中有一个像拉普拉斯这么有影响力的人给予庇护,自然是个非常好的有利条件;我们马上就能看到,受益于社团成员身份的,有一个就是他的弟子泊松(Poisson)。这两座宅第今天几乎已经无迹可寻,但在通往索镇的郊区铁路线上,在宅第曾经矗立的地方,有一个站叫做拉普拉斯站。

作为参议员,拉普拉斯在 1814 年投票反对拿破仑,支持路易十八代替。波旁王朝复辟帝制,次年,他获封侯爵头衔,被任命为委员会主席,负责监督巴黎综合理工学院的重组。在这个职位上,他将学校课程由三年减为两年,并使之成为进入更为专业的专科院校的先决条件,如已经恢复办学了的巴黎路桥学院等。军事工程的偏重被减轻,新加进历史、品德和"社会计算"课程。但是数学仍是课程中心,在 19 世纪的绝大部分时间,拥有安培(Ampère)、柯西、傅里叶、拉格朗日、拉普拉斯、勒让德(Legendre)、蒙日、泊松和彭赛列(Poncelet)的巴黎综合理工学院,是在法国或是其他任何地方学习这一科目的最佳地点。

拉普拉斯政治上的机会主义让他万事亨通,并继续他的科学工作。然而,他的势力开始减弱,因为新的发现开始破坏他的信仰,他的理论开始被取代。例如,我们将会看到索菲·热尔曼(Sophie Germain)发表了一种弹性表面的新理论,同拉普拉斯的方法大相径庭。拉普拉斯发现自己在科学界的复兴中越来越孤立。他的余生仍然效忠于波旁王朝。当他所在的法兰西语言文学学院发表一项支持言论自由的声明时,他拒绝签字。

在他生命的最后几年里,拉普拉斯主要住在他阿尔克伊的庄园里。他那装饰典雅的宅第在一个美丽的公园内,他在那里迎接了许多访问

巴黎的科学家,并很气派地接待了他们。英国科学家戴维(Humphry Davy)将他描述为"相当拘谨,举止庄重,这气派与其说是一种礼节不如说是一种照应"。其他到访者,特别是玛丽·萨默维尔(Mary Somerville),则较为享受这种经历。她将他描述成"个子不高,偏瘦,笔挺又刻板。他举止高贵,但其中又有一点阿谀的气息,也许是因为在拿破仑一世的朝堂上待得太久了。"

拉普拉斯直到老年都保持着非常好的记忆力。他一生中大部分时间都保持健康,充满活力。他病了一小段时间,然后于1827年3月5日在阿尔克伊去世,就在他的76岁生日之前。有人指出,这一日期几乎就在牛顿死后一个世纪,他也经常被拿来同牛顿比较。贝托莱,他在学会中的伙伴,早在五年前就去世了。一开始拉普拉斯被安葬在巴黎的拉雪兹神父墓地。1878年为他在那里建立的纪念碑被转移到他的出生地博蒙昂诺,十年后他的遗体从拉雪兹神父墓地被转移到圣于连-德马约的家族城堡,同他妻子和孩子的遗体合葬。这位侯爵的夫人捐赠了一笔基金,每年都给巴黎综合理工学院榜上有名的学生一套她已故丈夫的作品全集。不幸的是,他的许多未发表的论文都在1925年德马约城堡的一场大火中烧毁了,当时这些论文的拥有者是他的玄孙,科尔伯特-拉普拉斯(Colbert-Laplace)伯爵。

他的弟子泊松在拉普拉斯的葬礼上发言,并将他同拉格朗日相比较:

> 这两个天才之间有一个差异,任何阅读他们作品的人都会注意到。无论问题是月球的天平动,还是数论中的某个题目,拉格朗日在要处理的问题中看到的往往只有通过这些问题所表现的数学,他赋予公式化之优雅和方法之普适的高价值便来自那里。拉普拉斯则相反,数学分析是他为了达到最广泛应用的目的而使用的工具,而他总是会让方法本身屈从于每个问题的内容。也许后人会看出,一位是伟大的数学家,另一位是伟大的科学家,他通过最先进的数学工具,来探寻自然的知识。

勒让德(1752—1833)

阿德里安-马里·勒让德(Adrien-Marie Legendre 或 Adrien-Marie Le Gendre)*,是我们第一组数学家中的最后一位,他被认为是椭圆函数理论的创始人。他鼓舞了阿贝尔(Abel)和雅可比(Jacobi),虽然他们的发现很大程度上让勒让德本人在那个数学分支上的工作显得过时。他还对其他领域做出了显著贡献,包括数论和天体力学。整个19世纪,让他最知名的是作为一本几何学教科书的作者,而这本书原本只是欧几里得(Euclid)《几何原本》(*Elements*)的简化版。它经历了多次再版,新鲜材料被加入,并被翻译成其他语言,所以它在法国之外的其他国家作为一本标准几何学教科书长达近一个世纪。同他黄金时代的同道相比,勒让德算不上什么公众人物。正如泊松在他的悼词中说道,"这是我们这位同事经常重复的愿望,即当人们说到他的时候,只应该提到他的作品,但实际上,作品就是他的全部。"既如此,我们必须要用我们能接触到的有限材料做到最好。



勒让德1752年9月18日出生在巴黎,所以他要比拉普拉斯和蒙日小几岁。对他的背景我们知之甚少,但显然他出自一个小康之家。像达朗贝尔一样,他就读于四区学院,在那里他获得了格外先进的数学教育。在18岁的时候,勒让德成功通过了数学和物理的论文审核,四年后他发表了基于这些论文的力学专著。之后,他在巴黎军事学校兼

* 原著中所用的肖像是与他同一年出生的法国政治家路易·勒让德(Louis Legendre),这一错误存在了将近200年,直到2005年才被人发现,而原著出版于2002年。中译本纠正了这一错误,故本书中的勒让德肖像不同于原著。——译者

职教学直到1780年。在即将来临的动荡中他将失去他的大部分财富，但直到那时，他还是可以将大部分精力放在研究上的。

1782年勒让德凭借一篇关于弹道的论文获得柏林科学院的嘉奖，这篇文章中空气阻力被纳入考虑。他这篇在柏林发表的文章获得了成功，吸引了拉格朗日的注意，然后通过他又吸引了拉普拉斯的注意。第二年，他在巴黎科学院展示了他第一篇重要论文。这涉及行星类球体（具有类似球的形状，但不完全是球形）的引力。他还就各种主题向拉普拉斯提交了论文，包括连分数的性质和不受加速力影响的物体旋转。其结果是，勒让德于1783年被选为科学院的助理院士，两年后被提升为准院士。

1784年，勒让德展示了关于天体力学的另一篇论文。它处理了一团旋转液态类似球状物质的平衡态形式。正是在这篇论文里他介绍了广为人知的、与他的名字相连的多项式族。关于一类特定形式微分方程的这些解至今仍在应用数学中发挥重要作用。他对于天体力学的兴趣又进一步引出了两篇论文，一篇是关于某些椭球的引力，另一篇是关于流体行星的形态和密度。

勒让德的事业在其他方面继续蓬勃发展。其中一个当时在进行中的主要大地测量学项目，是由格林尼治天文台和巴黎的大学合作承担的。1787年，他被指派到这个项目工作，并取得了巨大成功。产生的主要理论成果是一个阐述球面三角形如何被当作平面三角形处理的定理，前提是对角度做一定的修正。大地测量学项目与拉普拉斯、拉格朗日等人参与的度量衡改革工作相关。虽然勒让德不在最初为此设立的委员会里，他还是成了1791年设立的一个小机构的成员，该机构的职能是监管新系统的采用，之后被委员会吸纳。1794年他成为昙花一现的马拉专科学院的数学教授。1799年他接替拉普拉斯成为炮兵学校学员的数学考官，他在这一职位上一直干到1815年，之后他接替了拉格朗日在经度局的位置。

尽管勒让德逃过了革命时期最恶劣的暴行，但科学院被打压对他

个人仍然是一个重大打击，我们从他在1832年写给新婚的雅可比的信中可以看出：“我比你成家晚，而且是在一场夺走了我可怜财产的流血革命以后；我们陷入窘境，有过非常艰难的时期，但我的妻子坚定地帮助我打理事务……以确保……在革命带来巨大损失后，剩余的一点财产仍然够我养老，以及在我去世后够我亲爱的妻子养老。”

事实上，勒让德写下这些话的时候，他已经接近生命的尽头了。他还写信给他的出版商说“对严肃数学研究的爱好在我国逐渐冷却，但相比之下，在其他国家都在转暖。”在经历了漫长痛苦的疾病之后，他于1833年1月9日或10日在巴黎去世，享年81岁，没有留下后代。1792年嫁给他、现在成了遗孀的玛格丽特（Marguerite），对他有着近乎狂热的崇拜，她精心保存他的物品，毫无疑问这包括他的肖像，但是没能留存下来。1856年她去世时，她将他们一起居住的最后一栋房子遗赠给了欧特伊村，那时它还是个乡村，现在已经是巴黎城区的一部分了。他不是一个追名逐利的人，而且不像拉格朗日、拉普拉斯和蒙日，他没有被封爵，但他的成就也不是完全不被认可。在法国，他被荣誉军团吸纳，并被授予帝国骑士勋章。他也被选为伦敦皇家学会的会员，以表彰他在大地测量学方面的工作。

他最成功的著作是他编写的教科书《几何学基础》（*Eléments de géométrie*），后来的版本除了欧几里得几何外，还包括了三角学基础、对圆周率 π 无理性的证明，以及其他一些材料。一则关于平行线理论的附录发表于1803年。其他著作与他的研究兴趣联系更加紧密，但讽刺的是，勒让德的名字主要是同这本平凡的教科书连在了一起。

他关于数论的第一篇论文要追溯到1785年。简单来说，它提出了二次互反律，通过这一定律可以将任意两个奇素数联系起来。1798年，他出版了《数论》（*Essai sur la théorie des nombres*）第一版。此后不久，高斯（Gauss）的力作《算术研究》（*Disquisitiones arithmeticae*）问世，如库默尔（Kummer）后来所说，“即使是一生大部分时间致力于高等算术的勒让德，在他的《数论》第二版中也不得不承认，他本来愿意用高斯的

结果来丰富它,但是这位作者的方法如此奇特,以至于若如此做便会离题万里或只是起到翻译的作用。"1830 年出版的第三版,很多年后仍然被认为是数论的标准教科书。

然而,到了 1810 年,他的兴趣已经转向不同的方向。勒让德被认为是椭圆函数论的创始人,该理论的发展在 19 世纪如火如荼(但他所称的椭圆函数被后人称为椭圆积分)。他关于这一主题的第一本著作于次年出版,在其中他提出了椭圆曲线的积分。为了避免混淆,这里作些解释是有必要的。首先,数学的这个分支起源于确定椭圆弧长的问题,要达到这个目标需要计算某种积分的值,也就是椭圆积分的值。当椭圆只是一个圆时,每个学数学的学生都知道,这可以用反三角函数来完成。由于三角函数有很多良好的性质,而其反函数并不具备,不出意料,椭圆积分非常棘手。勒让德,作为这个领域的先行者,错过了重要的洞察,那就是椭圆积分的反函数也许拥有一些椭圆积分本身不具备的良好性质。在标准术语里,椭圆函数是椭圆积分的反函数。这还不是全部:三角函数是单实变量的周期性实值函数。对于一个令人满意的理论来说,椭圆函数必须被视为单复变量的复值函数。此外,三角函数是单周期的,而椭圆函数是双周期的。

现在让我们回到勒让德的出版物品,不要忘记他用的术语椭圆函数在标准术语中是指椭圆积分。1811 年,他出版了另一部主要作品《积分学演习》(*Exercises on the integral calculus*)的第一卷,其中大部分涉及处理椭圆积分。到 1817 年又出版了第二卷和第三卷。但是他把他最有影响力的作品留到了最后。从 1825 至 1828 年,他出版了三卷《椭圆函数论》(*Traité des fonctions elliptiques*),是他在这一领域研究的拓展。不幸的是,勒让德把它当作是积分学中的一个问题,而没能意识到它可能被看作高等的三角学,并成为分析学的独立一支。

勒让德的专著集其前辈对这一理论的大小贡献,以及他自己对他们结果的扩展之大成。就像埃尔米特(Charles Hermite)后来所说的那样:"勒让德被认为是椭圆函数论的奠基人是有太多理由的,他为他的

继承者们铺平了道路;正是阿贝尔和雅可比随即发现的、而在他的作品中缺失的反函数的双周期性这一事实,给了其专著如此一种受抑制的分析特性。”发现处理椭圆函数更好方法的任务被留给了年轻一代数学家。勒让德立即意识到了他们方法的优越性。在他生命的最后几年里,他针对此著作第三卷发布了三个增补,并总结道:“我们只是触碰到了这个课题的表面,但是可以想象,它会不断地被数学家的工作充实,最终构成超越函数的分析中最美丽的部分之一。”于是,他最后的职业行为,几乎就是推荐这些将要超越他自身成就的发现。

年轻一代的数学家主要是指挪威的阿贝尔和德国的雅可比,他们的传略将会在下一章看到。1827 年阿贝尔去看望勒让德时,勒让德发现他彬彬有礼,后来他们开始通信。雅可比文集的第一卷包括了雅可比和勒让德之间特别有趣的用法语进行的通信,前后延续了五年。当中的第一封信是 1828 年勒让德向科学院汇报了雅可比的第一本著作后发出的。他写给雅可比:“看见像你和(阿贝尔)两个这么年轻的数学家,在我长时间以来最感兴趣的研究对象即分析学的一门分支上取得成功,我真的非常欣慰。这一分支在我的国家并没有得到它应当得到的重视。”第二年,他写了一封更长的信:

先生们,你们在所有这些美妙理论上的进展如此迅速,想要跟上你们已经是不可能了——尤其是对一个老人来说,欧拉在我这个年纪已经去世了,这个年纪的人需要同一大堆疾病做斗争,已经没有精神去克服困难、适应新想法了。尽管如此,我还是庆幸自己活得够久,能够亲眼见证两位实力相当的年轻选手之间坦荡的比赛,他们将自己的努力献给了科学,将科学的边界向外扩展再扩展。

第二章

从傅里叶到柯西

接下来我们要讲述的6位数学名家生于1768—1789年的22年间。其中5位来自法国,另外1位来自德国。

傅里叶(1768—1830)

傅里叶(Jean-Baptiste-Joseph Fourier)的科学成就主要在于他的热扩散理论。不过,其中涉及的数学技巧,特别是三角级数,在其他领域也很重要。事实上,我们称为傅里叶级数的理论,在很长时间内都未获恰当理解。相对而言,似乎极少的数学家能够且愿意承担主要的行政职责,而傅里叶则是做得十分成功的一位。



让-巴普蒂斯-约瑟夫·傅里叶于1768年3月21日在勃艮第西部主要城市欧塞尔出生,是那里最杰出的市民。他的父亲约瑟夫(Joseph),

一位原籍洛林的巧艺裁缝，和母亲埃德梅(Edmie)，在他十岁之前双双辞世。好在一些当地居民在意小傅里叶的学业，并为他在先进的皇家军事学校里争取到一个名额，该校是本笃会和其他修士会管理下的众多学校之一。这里讲授科学、数学和其他各科，而小傅里叶显露出全方位的才能，在数学方面尤有天赋。他从那里进入巴黎的蒙塔古学院继续深造。他的目标是参军做炮兵或者工程兵，这些兵种本应面向社会各阶层开放，但他去申请时，尽管有军事学校视察员勒让德的鼎力推荐，却仍遭到了拒绝。虽然他可能因为体格方面的原因而被拒收，但是部长给出的理由却是，只有出身高贵的申请人才能被接受。

这次挫折之后，傅里叶开始在教会任事。他成为著名的本笃会卢瓦尔河畔圣伯努瓦修道院的见习修士，在那里他受命向其他见习修士教授初等数学。在立下隐修誓言后，他成为傅里叶神父，但是他并未继续在教会任事，而是返回欧塞尔在军事学校任教。此时他 21 岁，就已在巴黎科学院的一次会议上宣读过研究论文。

在大革命的最初岁月里，傅里叶在地方事务中崭露头角。他为恐怖统治受害者所做的勇敢辩护，致使他 1794 年被公共安全委员会下令逮捕。尽管向罗伯斯庇尔发出的个人呼吁归于失败，但他却于罗氏被斩首后获释。其后傅里叶成为短命的师范学校的学生。那里所用的新颖教学方法给他留下强烈印象，也让他有机会结识包括拉格朗日、拉普拉斯和蒙日在内的一些当时一流的数学家。当高傲的拉普拉斯由于管理纰漏被登记成学生而非教授时，傅里叶为之一乐。次年，当巴黎综合理工学院以其最初的“中央公共工程学院”之名创立时，傅里叶被委任为助理讲师，以协助拉格朗日和蒙日的教学。然而，不久他成为反对前政权的政治势力的牺牲品，并再度被捕。他在狱中度过了一段焦心的光景，但学院的同事们成功将他解救出来。

1798 年，他被选中参加一次目的地未公开的远征。那实际上是拿破仑的埃及冒险行动。新组建的以蒙日为院长、傅里叶为常务秘书的埃及研究院在开罗一经设立，这个远征队的文化分部就着手研究古董

文物，其中有一些被顺手牵羊了。除这一活动之外，傅里叶被委以一些性质灵活的谈判事宜，他甚至还能抽出时间思考数学。他提议发表一份关于埃及研究院工作的报告，在其归法途中，还接受了该报告整体组织方面的询问，并作为代表撰写了一篇描述埃及古文明奇观的再发现的历史性序言。当《埃及记述》(*Description de l'Egypte*)出版时，傅里叶那篇略经拿破仑修订的优雅序言出现在卷首。

同时，傅里叶在巴黎综合理工学院继续开展他的工作。但不久之后，对他的行政才能留有深刻印象的拿破仑，决定任命他为延伸至当时意大利边界、以格勒诺布尔为首府的伊泽尔省省长。省长的公职对精力要求甚多，但正是在此期间，傅里叶写成了他关于热扩散的经典专论，名为"论固体内的热传播"(On the propagation of heat in solid bodies)，并于1807年呈送至巴黎科学院。该作由拉格朗日、拉普拉斯、拉克鲁瓦(Lacroix)和蒙日审查。拉格朗日坚决反对其某些要点(特别是三角级数亦即我们所说的傅里叶级数的核心概念)，以致该作的完整出版受阻，而仅有泊松所写的五页不够充分的综述发表。作为热扩散理论方面的竞争者，泊松和比奥(Biot)远不如傅里叶，他们多年来都试图贬低其成就。后来傅里叶因这一工作从科学院获得一项奖赏，但是直到1822年，傅里叶的热扩散理论才得以出版。《热的解析理论》(*Théorie analytique de la chaleur*)被麦克斯韦(Clerk Maxwell)描述为"伟大的数学诗篇"，在此我们引述其序言中的一段：

初始原因对我们来说还是未知，但是它服从于可以借由观察来研究的简单而永恒的法则，而对其研究就是自然哲学的目标……热，如同重力一般，遍及宇宙的所有物质；它的辐射占据空间的所有区域。我们工作的目标就在于揭示这一元素所遵循的数学法则……但是不管力学理论的范围如何，它们根本不适用于热效应。它们构成了一种有特殊规律的现象，无法用运动或均衡的原理来解释……热传播的微分方程表达了最一般的情况，并将物理学问题简化为纯粹分析学的题目，而这

正是该理论的目的。

作为省长，傅里叶的行政业绩包括获得 37 个不同社区间的协议，以排干大片沼泽作为宝贵的耕地，以及规划格勒诺布尔和都灵之间壮观的公路——此工程只有法国境内的路段修成。拿破仑授予他男爵头衔，以表彰其作为省长的杰出工作。

1814 年拿破仑失势之时，傅里叶仍在格勒诺布尔。这座城市恰巧位于押解皇帝从巴黎向南并由此转往厄尔巴岛的路线之上；为了避免与他旧时的领袖碰面而为难，傅里叶与解押者商议，定了一条行程中的迂回路线。但是这种迂回在 1815 年拿破仑行军返回巴黎之际则毫无可能，因而傅里叶折中为事，既下令做好防御准备——他知道这将徒劳无用——以尽到他作为省长的职责，然后又在拿破仑从一座大门攻入时，他从另一座大门离开此城。他对这种尴尬局面的处理，并未影响他们之间的关系。实际上，皇帝随即授予他伯爵头衔，并任命他为邻近的以里昂为首府的罗纳省省长。然而，在百日王朝结束之前，傅里叶辞去了他的新头衔和职位以抗议苛政，并返回巴黎，专注于科学研究。

这是傅里叶的人生低谷。在短期内，他没有工作，靠一点微薄的抚恤金维生，亦在政治上失宠。不过，一位他以前在综合理工学院的学生，也是他在埃及时的同伴，当时正是塞纳省省长。他委任傅里叶为塞纳省统计局局长，该职位没有繁重的任务，但是薪水足够其用度。

傅里叶创造性活力的最后迸发是在 1817—1818 年，其时，他对微分方程的积分变换解法和运算微积之间的关系获得了一种透彻的洞察。那一时期，傅里叶、泊松和柯西在发展这一技术的进展上呈三方竞逐之势。在针对泊松非难的压制性回应中，傅里叶给出几个长期以来无从分析的方程的积分变换解法，并为柯西发展出导向留数计算的一种系统性理论铺平了道路。

1816 年，傅里叶被选入重新改组的科学院，但是路易十八无法原谅他曾接受拿破仑委任的罗纳省省长的职位，最初拒绝批准选举结果。

变通的协商最终化解了这一局面，次年他的重新提名获批。他也在《埃及记述》第二版上遇到一些问题（因为此时他提及拿破仑之处需要修订），但总体上他的声誉很快恢复。在阿尔克伊学会衰落后，傅里叶获得强势地位，并在与泊松的相互敌对中得到拉普拉斯的支持。1822年，他当选科学院常务秘书这一要职。1827年，傅里叶继达朗贝尔和拉普拉斯之后，入选法兰西语言文学学院。在法国以外，他还被选入伦敦皇家学会。

傅里叶的健康一贯都不够好，到晚年他开始表现出一些奇怪的症状，现在被认为是由一种叫做黏液水肿的甲状腺疾病引发的，很可能是他在埃及所感染。除一些身体症状外，这一疾病可致记忆迟钝，而这很明显地表现在他晚年所写的语无伦次的信件中。或许这也是1830年早些时候发生的那一不幸事件的部分原因，我们将看到，他显然遗失了伽罗瓦递送给科学院的关于解方程的第二篇论文。当时，傅里叶已病入膏肓，而难以承受咎责。1830年5月上旬，他曾经晕厥，之后病情持续恶化，直至5月16日逝世，终年62岁。他的葬礼在圣雅克教堂举行，他被下葬于拉雪兹神父公墓，临近蒙日的墓穴。

终其学术生涯，傅里叶都以无私的支持和鼓励赢得年轻朋友的忠诚；晚年他帮助了包括奥斯特（Oersted）、狄利克雷（Dirichlet）、阿贝尔和斯图姆（Sturm）在内的诸多数学家和科学家。他的科学成就主要在于热扩散，以及对其深入研究所引入的数学技巧。他对这个问题的兴趣可能始于他在埃及期间，但主要工作是在格勒诺布尔完成的。他曾经说，对自然的深刻研究是数学发现最重要和最丰富的源泉，但他所创造的数学理论也得到了广泛而多样的应用。

傅里叶不是一个天真的形式主义者。他意识到对一个给定的三角级数进行逐项积分，以计算其系数的值，是无法确保正确的。对应于极为宽泛的领域内的任何一个函数，可以构造一个其值在指定区间与这个函数的值相同的三角级数。一如他所举之例，这个给定的函数甚至可以是不同代数表达式的组合，它们各个定义在基本区间的不相重的

子区间上。三角展开式和任意函数都曾有人用过，但是前者局限于涉及周期性现象的问题，而后者出现在偏微分方程解中时，由它们的性质被认定为无法有代数表达。他在三角展开式上的工作造成的巨大震撼，在于他对有限区间上完全不同形式的代数表达式之间的等同性这一反常性质的揭示。

傅里叶的观点属于理性力学。他拥有一手高超的分析技术，而这种能力在物理直觉的引导下让他走向成功。在他之前，理性力学中主要问题所使用的方程通常都是非线性的，而它们得通过针对性的方法予以解出。傅里叶创造出一种一致的方法，由此一个方程及其级数解的不同分量都精妙地与正在被分析的物理解的不同方面相一致。在将其方程的解的渐近性质诠释为它们的物理含义方面，他也有一种独一无二的直觉。他的解决方法是如此有力，以致整整一个世纪之后，非线性方程才在数学物理中重获优势地位。

尽管傅里叶以其热扩散方面的工作最为著名，但他所创造的数学知识在其他诸多方向上已被证明其重要性。在数学物理上，与拉普拉斯相比，傅里叶的思想实际上更富有成果。傅里叶对方程理论抱有长久兴趣，并试图在其人生的最后阶段就此主题完成一部书。他在此方面的一些想法早已融入斯图姆定理之中，而另外一些则是近来才在线性规划理论中获得应用。他对动力学和概率论亦感兴趣。作为一名数学家，傅里叶对涉及严密性的那些实际问题的关注与他那个时代除柯西和阿贝尔以外的其他人同样强烈，但是他未能将极限过程理论作为本身就是一种有意义的实际操练而构想出来。

热尔曼(1776—1831)

直到最近，对一位女性来说，要在学术方面取得优异成就几乎是不大可能的。在科学界特别是数学界，更是如此。本书收入的三位女数学家的传略将对这一现象的直接原因做出解释，她们分别来自法国、俄

国和德国。如果我们把近现代的女数学家考虑进来，那么肯定不止三位。而且毫无疑问，在过去一定有许多女性本可以成就斐然，但却因难以逾越的社会偏见而默默无闻。即便是现在，仍有些人认为数学在某种程度上是"男人的事情"，尽管有很多证据表明事实并非如此。但这里并不适合谈论那些已经被翻来覆去写了很多遍的故事，不过这里的三个例子除外。



1776年4月1日，玛丽－索菲·热尔曼(Marie-Sophie Germain)出生于巴黎的一个中产阶级家庭，她的家族靠世代经商过着富足的生活。她的父亲是个丝绸商，曾被选为平民阶层的代表参加1789年召开的制宪会议*，一度活跃于法国大革命初期的政界。后来，他当了法兰西银行的一名主管。他在1821年去世，享年95岁。索菲在他的三个女儿中排行第二，一生都依赖于他的经济支持。她终身未嫁，一直致力于数学和科学研究。索菲·热尔曼——她这样称呼自己——在大革命的背景下长大。这个女孩天性害羞，常常躲进父亲的藏书室，在书中流连忘返。尤其有两本关于数学的书十分吸引她：贝祖(Bézout)的标准教科书和蒙蒂克拉(Montucla)的数学史书。带着满腔热情，她走近了数学研究。

1795年巴黎综合理工学院成立时，索菲·热尔曼正十八九岁，但由于是女性，她未能入学。她的讣告中提到她跨越了所有的障碍：

> 不管是对于她的年龄还是性别，这个爱好都显得如此离奇，以至于她的家人起初尝试用种种障碍来阻止她……随着巴黎师范学校和巴黎

* 1789年，法国的制宪会议通过了《人权与公民权利宣言》，即《人权宣言》。——译者

综合理工学院的成立，她设法得到了不同教授的讲义用来自学。富克鲁瓦*的化学和拉格朗日的分析学格外吸引她。在那个时代，这些教授都有个很好的做法，会在课程的最后要求学生书面提交他们的学习结果。热尔曼小姐用巴黎综合理工学院一个学生的名字，将自己的报告呈交给了拉格朗日。

她化名为勒布朗(LeBlanc)：巴黎综合理工学院当时曾有个大她一岁的学生叫做安托万-奥古斯特·勒布朗(Antoine-Auguste LeBlanc)，不久前去世了。拉格朗日对她的报告印象深刻，当得知她的真实身份时，他感到"震惊"。自此，巴黎的一些科学家开始为她的学习提供帮助。1797年，她读完了拉普拉斯那晦涩难懂的《宇宙体系论》，毅然摒弃了手头名为《女士天文学》(*Astronomie des dames*)的科普书。

索菲·热尔曼似乎已经退出了那个时代正常的社交生活，并厌恶那些将她作为稀奇人物来对待的人。当她的学习愈发进步，她开始在感兴趣的领域中同那些一流科学家通信。当她开始学习数论时，她便给勒让德写信，并在后来发展成定期通信。然而，索菲·热尔曼最重要的通信对象是高斯，这位德国数学家将是我们下一节的主人公。在职业生涯的这个阶段，高斯仍待在不伦瑞克，刚刚完成关于数论的巨著，后来在1801年出版。1804年，高斯已在巴黎得到高度认可。拉格朗日写信祝贺他："您的《算术研究》使您跻身一流数学家之列，我认为最后一章包含了长久以来最漂亮的分析与发现……请相信我，先生，没有人比我更欣赏您的成就。"

索菲·热尔曼在1804年11月用化名给高斯写信："很久以来，我带着钦慕的心情拜读您的《算术研究》。它的最后一章包含了漂亮的定理，还有其他许多可圈可点的内容……当我手捧这本书等待续篇时，

---

* 富克鲁瓦(Fourcroy，1755—1809)，法国化学家拉瓦锡的同事，曾积极参与化学事业的发展，但传闻因导致了拉瓦锡的死而颇有争议。——译者

没有什么能比得上我的渴望之情。我被告知您此刻正致力于此。只要续篇一问世，我会不惜一切买到它。”事实上并没有什么续篇，尽管为了节省开支，《算术研究》在出版时删去了部分内容。

研究并完成了书中的一些练习之后，索菲·热尔曼决心让自己付出的努力得到评价，便继续给高斯写信：“您在这门科学中实现了辉煌的成就，我对这门科学抱有极大热情。也许您并不介意开导我这个业余爱好者？正是被这个想法说服，我冒昧地恳求您给出意见。”虽然热尔曼信中所附的大多数研究细节已经遗失，但高斯在给“勒布朗先生”的回信中表示，在他看来，这些努力不无可取之处。得到了这封回信的鼓励，热尔曼向高斯寄出了更多她所做的研究例证。

您出于纵容，竟看得起我给我回信。毋庸置疑，我对您充满了感激！您给了我继续讨论您的研究的希望；没什么能比这更让我快乐。事实上，我所能做的只有苍白无力的尝试，而您却精通于发掘那些天才方法，这两者之间简直有着天壤之别！然而，既然您已经好心好意地考虑了我寄给您的笔记，我冒昧地又给您寄了些新的来。您曾经许诺过要证明，行列式等于零的三元二次型等价于一个二元二次型。我一度尝试完成这个约化，结果发现，在这个情形中，伴随形式约化为一个平方数的 m 倍，这正是假定其行列式等于零的二元二次型所具有的形式。

然而，尽管她关心挂念，高斯鲜少给出她所希望得到的关键性评论。高斯只对跟他的定理有关的部分加以评论，而不涉及热尔曼本人的工作。这也许反映了高斯更多地专注于自身，而非热尔曼的智慧。我们不要忘了，高斯比热尔曼年轻，而且尽管他早早得到了声望，他仍处于职业生涯的开端。

索菲·热尔曼，从她的角度来说，倒是很愿意增强高斯的自负。她以勒布朗的化名写道：“很不幸，我的智力所及与我十足的‘胃口’并不匹配，我和所有读者一样对他崇敬有加，但除此之外，我别无长处可以

吸引他的注意，我很抱歉打扰他这样的天才。”我们又在另一处发现：“您许可我向您传达这些苍白无力的尝试，我将其视为一种恩惠，我相信您会费心地指出我在这一领域的研究中所犯的错误，在该领域中，您是我唯一可以求助的开明的评审官。”

作为一名“热情的业余爱好者”和“他勤勉的读者”，索菲·热尔曼从未动摇过对高斯过分热情的赞美，并迅速而及时地回复着他的信件。高斯，这个“开明的评审官”，却从未感觉自己有类似的义务，“我请您务必原谅，过去的六个月里没有回复这类信件，您是那样恭维我。”只有一次，高斯带着真正的热情立刻回了信——因为他发现“勒布朗先生”其实是个女人。

这次发现的情形如下。1806 年，拿破仑在耶拿的胜利开启了法国占领普鲁士的道路。由于担忧高斯在此形势下的安危，索菲·热尔曼请求一位世交佩纳蒂(Penerty)打听消息，他是一位高级军官。佩纳蒂将此事托给了一名并不十分了解情况的下属。当那个下属告诉高斯他是代热尔曼小姐行事时，高斯说他并不认识什么人叫那个名字，于是，她觉得必须暴露自己的真实身份了：

我向佩纳蒂先生托付了这项光荣使命，在向我描述这件事的始末时，他知会我已让您知道了我的名字，这让我不得不坦白，您并非像自己所认为的那样完全不认识我。但由于害怕人们对女科学家的嘲弄，我之前以“勒布朗先生”的名字向您寄了那些笔记，毋庸置疑，它们并不值得您在回复中如此包涵与纵容。您发现了算术的神秘，还将我算作崇高算术的爱好者之一，我对您给予我的鼓励感激在心。当战争让我担忧您的安危时，正是这份感激鼓励着我找寻您的消息；我已得知您待在自己的家中，尽环境所能允许地没有受到打扰，我非常满意。然而，由于天文学，特别是数学，对我而言有着特殊的吸引力，我希望这些事不会耽搁您进行这些方面的研究。您的书中展现了真理间的联系，我总是带着新的乐趣欣赏它们。不幸的是，只有少数有才智的人才拥

有进行有力思考的能力。您从已揭晓的结论中推导出了其他新结果，它们看起来毫不费力，但我想，换成我一定是什么都发现不了。

这得到了高斯如下的一封回信：

有您这样一位讨人喜欢的可爱朋友真是令人愉悦、暖人心房。在这场战争中，您对我的真诚关心值得我由衷地感谢……所幸这些事情和战争所带来的后果眼下并未对我产生太大影响，虽然我还是相信它们会对我未来的人生进程造成巨大冲击。但当我见识到这位受人尊敬的通信人"勒布朗先生"摇身变为一位颇有名气的人，还难以置信地获得了一份杰出的手稿，我该如何描述我惊异与钦佩的心情？您在总体上对抽象科学尤其是对数的奥秘充满兴趣，这样的兴趣难能可贵；这并不令人惊讶，因为科学那崇高美妙的迷人之处只对那些敢于探索它们的人展现。但一名女性，由于她的性别、我们的民俗和偏见，在探索这些疑难问题时遭遇了与男性相比前所未有的困难，然而她冲破了这些桎梏并洞察了那些隐藏的秘密，无疑，她拥有最崇高的勇气和过人的卓越天赋。科学的确给我的生活带来了许多乐趣，但没有什么能比你对科学的尊崇更能以一种无以复加的明确方式向我证明，科学的吸引力并不荒诞。大量的科学笔记充满了您的信，它们给了我无与伦比的快乐。我专心研究了它们，您能轻松自如地洞察每一个算术分支，并能聪明地概括、完善它们，这令我感到钦佩。

接下来高斯向她展示了三个关于三次剩余和四次剩余的新定理，"为了不剥夺你独自发现它们的乐趣"而没有对它们加以证明，这句评论为他的性格提供了一些线索。很显然，证明它们花了索菲·热尔曼一个月的时间，当她完成后便寄给了高斯，希望得到赞同。6个月后，高斯用如下信件单方面结束了他们的通信：

我对您的上一封信和信中您有趣的讨论感激不尽，回复晚矣，万望原谅。这样的疏忽多由我最近处境的改变所致。早在此前我便受邀担任格丁根大学的天文学教授一职，为了接受该职位，我搬迁了住址。不必再说那些影响我迈出这一步的恼人情形，更不必说这里带给我的全新焦虑。我曾求助于学院，希望他们的调停可以终止这一切。还是让我们聚焦当下吧，在这个美妙时刻，我可以再度工作，尤其是研究数学，还可以在格丁根学术圈的各种杂志上发表我的结果。我很乐意将这些工作所据的前提寄给您，我相信这能给您带来些许乐趣。如果此时我无法向您展示这些定理的漂亮证明，您一定会原谅我的。您会在很短的时间内掌握它们，我很欣赏您的这种才智。希望我能尽早发表这一完整的理论，而那些优雅的证明和林林总总的其他东西也能成为其中的一部分。在我身处忧愁与绝望之时，我的数学事务给我带来了莫大的快乐！只有当一个人沉浸在科学中、与自己的家人相聚或与亲近的朋友通信时，他才能从世俗的烦恼中解脱。我在上一封信中跟您谈到了计算行星轨道，这方面的工作终于将要出版。我希望这件事可以在几个月内结束。我不会让自己免去将文章翻译为拉丁文的麻烦，因为这样可以吸引大量读者。请永远幸福，我亲爱的朋友。您难能可贵的心灵与思想理应得到祝福，并要不时地向我温柔地保证，我是您的朋友之一，我将永远以此为傲。

这是她收到的来自高斯的最后一封信。高斯表达尊重的方式似乎已经逾越了传统。在当时的欧洲，鲜少有人有能力或是有兴趣彻底研究并理解他在数论方面的工作，但热尔曼做到了。当然，与高斯相比，热尔曼更依赖于他们的通信所提供的智力支持。其后的日子里，热尔曼陆续寄了一些科学研究样稿给高斯，而高斯则作了一些努力以保证她得到应得的认可。然而，这里还有一个不寻常的补记。巴黎科学院要授予高斯一个奖，通常是一枚奖章，高斯问能否用一座钟代替奖章，这样就能送给他的妻子，而余款则可给他现金。科学院的常务秘书傅里叶写信给索菲·热尔曼，说高斯问她可否为他挑选一座摆钟。

索菲·热尔曼在巴黎科学界变得小有名气,但在拉格朗日去世后,她需要一位新的支持者。慈祥的勒让德帮助了她。事实证明傅里叶友善而乐于助人。他做了一些安排,使她能够参加科学院的公开会议,虽然院士的妻子也可以出席,但在此之前这始终是件难事。她还收到了法兰西学院(Collège de France)的录取通知。

索菲·热尔曼不仅在证明费马大定理的不成功尝试中投入了大量心血,还在数学的一个全然不同领域给出了自己的见解。1808 年,德国物理学家克拉德尼(Ernst Chladni)访问巴黎,并阐述了一些他观察不同形状的盘子振动时发现的神秘图形*。三年后,科学院选其作为有奖竞赛"构想一个弹性表面振动的数学理论并解释它如何与实验证据相符"的主题。选择这个题目也许是受到了拉普拉斯的影响,他大概认为这刚好可以给他的弟子泊松提供一个展示才华的大好机会。然而索菲·热尔曼对此产生了兴趣,而当她加入到这场竞赛中时,结果她是唯一的参赛者。很不幸,其作品包含了一个致命的缺陷。科学院决定下一次有奖竞赛仍然选用该主题。她提交了一份 100 页的研究报告,又一次成为唯一的参赛者。她的部分论述被发现是不可靠的,但她获得了一项荣誉提名。1815 年的竞赛依然选用了该主题,她彻底校正了此前的研究报告,再度成为唯一参赛者,而这一次,她最终因她的努力而获得了"杰出金奖章"。即便如此,评审官对她的工作仍持保留态度,另外,虽然获得了成功,这次的经历仍令她气馁。她再没有参加任何有奖竞赛,就算主题是那个她曾为之做出重大贡献的费马大定理。她将证明寄给了高斯,但消息石沉大海。尽管如此,高斯并没有遗忘她;在他的科学生涯五十周年庆典之际,高斯尝试说服格丁根大学授予热尔曼荣誉博士学位,但没有成功。

---

* 克拉德尼图形,又称克拉德尼声音图案。19 世纪,德国物理学家克拉德尼做过一个实验,他在一个小提琴上安放一块较宽的金属薄片,在上面均匀地撒上沙子,然后开始用琴弓拉小提琴,结果这些细沙自动排列成不同的美丽图案,随着琴弦拉出的曲调不同和频率的不断增高,图案也不断变幻并越趋复杂。——译者

傅里叶帮热尔曼校订了那篇关于弹性的获奖研究报告，以求发表。那份报告直到1821年才问世，而这时，她的理论已经被取代了。曾是第三次竞赛评审官之一的泊松出版了一本相同主题的研究报告，但只讲了他本人的成就，而对他人的贡献轻描淡写。索菲・热尔曼试图在进一步的研究报告中拓展她的方法，但当这一篇也没有得到多少关注时，她转身离开了这个正变得越来越困难的题目。

现在，我们有必要插叙介绍一个臭名昭著的人物，在19世纪二三十年代的巴黎知识分子圈中，他的名声极差。此人是利布里－卡尔杜齐伯爵（Count Libri-Carducci），他是个举止优雅、浑身透着贵族气派、有着一种散文风格与之相配的意大利人，在比萨大学担任教授。他研究了勒让德和高斯在数论方面的工作，在1820年就这一主题发表了研究报告，并将之寄给了巴黎科学院。当他来到巴黎时，科学界对这位来自拉格朗日故乡的年轻有为、前途无量的数学家表示了欢迎。然而，后来的事实证明他是个十足的流氓。但在人们意识到这一点之前，他已被选为科学院的一员，并被授予法兰西学院的一个教席。他还献媚于宫廷，当国王得知他是个狂热的书籍收藏者时，当即任命他为图书馆总监。事实证明他正堕落于此，因为他根本就是按捺不住地利用自己的职权从他本应监查的法国国家档案馆和图书馆中盗取珍贵的书籍与手稿。当人们发现他的劣迹时，他已经搬去了伦敦，并以兜售自己的收藏品为生。而在法国，他被剥夺了此前的职务，还被判十年监禁。

索菲・热尔曼遇见利布里是在1824年，他第一次到巴黎的时候。他们对数论有着共同的爱好，但他们的友谊很快便超越了数学。然而热尔曼仅仅是困难地在巴黎科学界的边缘游离，她只能像个女支持者那样仰慕这位有抱负的意大利青年。而利布里则从这段关系中获取乐趣和种种好处。虽然不太现实，但这两位似乎都享受着对方的陪伴。热尔曼离世后，利布里为她写了讣告，这也是她生平情况的主要来源。

在索菲・热尔曼最后的时光里，她患上了乳腺癌。再也不能像往常一样充满精力、孜孜不倦地研究数学了，她将视野转向了更为普遍的

文化问题。1830 年革命*爆发时，她 54 岁。她只剩下一年的寿命，开始着手安排后事。1831 年 6 月 27 日去世时，热尔曼留下了一篇未完成的文章，一篇雄心勃勃的关于科学和文学现状的文章。第一章简短地讨论了科学尝试与艺术尝试之间的关系，第二章则洋洋洒洒地追溯了人类智力发展的历史和社会的本质，之后则转向了关于文学现状及音乐现状的调查。为后人整理她留下的作品的责任落在了她外甥的肩头，那是她姐姐的儿子。巴黎的一所女子技术学院和一条街道以热尔曼的姓氏命名，她在萨瓦街上度过最后时光的房子也在最近被指定为受保护建筑。她死后的面部模型似乎成了她所有现有肖像的来源；本书所使用的是 19 世纪阿斯特吕克（Astruc）所塑的一尊半身像，现立于索菲·热尔曼学校的庭院中。

1830 年，热尔曼最后一次给高斯写信。这是最后一封信，也是最哀伤的一封信。高斯的一个学生拜访热尔曼时促成了这封信，从这个学生处，她了解到高斯已经发表了关于曲面曲率的研究。大约八到十年前，热尔曼也曾对这个主题充满兴趣，尽管他们使用的方法并不相同。热尔曼不知道高斯曾就曲率方面写过文章，虽说那个学生向她展示了高斯的一份研究报告。热尔曼委婉地向那个学生暗示要留下一份给自己，以回应那篇她寄给了高斯却没有得到回复的研究报告。她将自己的《曲面曲率研究报告》（Memoir on the curvature of surfaces）寄出并发表在克雷尔（Crelle）的《纯粹与应用数学杂志》（*Journal für die reine und angewandte Mathematik*）上，关于该杂志后面还会详述。

我们所知的她亲笔写下的最后的话是在她离世前两个月写给利布里的：

我的健康状况可怕得很。猝死对我来说都算是一种解脱，因为我经受着难以置信的痛苦，它让我一刻都不得安宁。我想要至少读一读

* 指法国七月革命，推翻了复辟的波旁王朝，建立了新的“七月王朝”。——译者

拉克鲁瓦著作的第三卷,但我做不到。我始终缄默。我见不到勒让德先生,也见不到其他朋友,除了圣阿芒(Saint Amant),他总是关心你和我的妹妹。他们说我的情况并不绝望,但要我做好承受病痛的准备。我收到了克雷尔先生的一期杂志,收录了你的一份研究报告,还有我的。他向我询问你的消息,我告诉他你离开了日内瓦。至于我,我说他的好意我定是无福消受了,至少长时间内会是如此。这一定是所有数学家的宿命——你那令人不愉快的成见,以及柯西的,还有傅里叶先生的离世。最后是那个学生伽罗瓦,虽然鲁莽失礼,但性格挺好。他终究设法让自己被巴黎师范学校驱逐了。他没有财产,他的母亲也是箪食瓢饮。他继续着自己的有害行为,就像你在科学院做了最好的演讲时他所做的那样。那个可怜的女人留下了足够让他过上一个像样生活的财物后离开了家,被迫成了一名受雇陪伴贵夫人的女伴。有人听说他已经彻底疯了,我想是这样。

我们将在后面进一步介绍伽罗瓦。关于索菲·热尔曼的个人信息我们了解得少之又少,我们不得不依赖于利布里的悼词:

热尔曼小姐不仅投身于数学,还掌握了不同领域的学识,它们中的任何一个领域都足以建立一位女性的名望。她在自然科学领域中很是厉害。非但如此,她还自学了拉丁语,但不是为了学而学,因为在她看来,语言只是学习的工具,可以让她理解不同的工作,尤其是牛顿和欧拉的研究。另外,人们在她的论文中还发现了一些极其微妙的哲学思考,因为她积极支持形而上学,她曾将它称为真正哲学精神的来源。她对不同的哲学体系考虑得不多,认为它们是超群智慧者的文学创作。

她的谈吐体现了一种完全特别的天性。较为显著的特征就是她拥有一种能力,可以在刹那间拾取一个基本想法,并跳过中间的所有步骤,得出它的最终结果;在幽默这一轻松雅致的形式之下,总是隐藏着她那明确而深刻的思想;她从多种多样的研究中掌握了一种能力,可以

协调物理规律与道德秩序间的相似性,她认为两者遵循相同的法则。她总是先于自己之前考虑到别人,如果要在这里加上这经久不衰的善行,人们一定会觉得,这就是她的魅力。

她无时无刻不表现出忘我。在科学方面这很明显,她一路走来都伴随着完全的自我否定,从不考虑成功能带来的种种好处。她甚至会在别人采用她的想法并取得成果时感到高兴。她总是说谁第一个想到并不重要,这一想法能走多远才更有意义。她开心地讲述自己的想法为科学带来了成果而自己没有收获任何声誉——她对此不屑一顾,并好笑地将追逐名利的荣耀之事称为我们在他人头脑中占据的狭小空间。

她的举止也体现了她的高贵品质,那种总是被标示为美德的举止,她说她如珍惜数学真理般予以爱护。她无法想象一个人只喜欢一种秩序的想法而排斥其他,在她看来,正义和美德是每个人即便不珍惜也要遵守的秩序。这就是不凡的索菲·热尔曼,她是将数学研究追寻到最深处的那一个,也是据我们所知唯一真正取得实质性进展的人。

高斯(1777—1855)

在7个著名法国数学家之后,我们现在转到德国。莱布尼茨这位卓越的天才对德国几乎没有什么直接的影响,当时德国还是众多独立



的小国家,而不是法国那样的强大国家。不过,在莱布尼茨去世50年后,一个婴儿在不伦瑞克降生,他就像欧拉一样将成为"数学王子"。德国的数学传统主要来源于约翰·卡尔·弗里德里希·高斯(Johann Carl Friedrich Gauss)。他令人敬畏的智力和广泛的兴趣是毫无疑问的,但是正如我们在他与索菲·热尔曼的通信中所见,他喜欢

独自工作，而且惟恐于卷入其他数学家尝试做的事情。

高斯生于1777年4月30日。他的父亲格哈德·迪特里希·高斯(Gerhard Dietrich Gauss)结过两次婚，在不伦瑞克做过一系列卑微的工作。他从乡村来到城市，在老家他和他的祖先都是小农民，他们发现了一些更具有吸引力的城市工作，但是那些工作被中世纪行会控制，对像他那样的新来者来说是无法进入的。作为克服这些障碍的第一步，这个家庭在城市里获得了一个住宅，因此获得了完整的市民身份。格哈德于1775年9月5日与多罗特娅·本策(Dorothea Benze)结婚，这是他的第二次婚姻，妻子是一位聪慧但是显然几乎没有文化的女子，卡尔·弗里德里希是现在所知的这次婚姻的唯一子女。后来，高斯倾向于将他的天赋更多地归因于他的母亲而不是他的父亲。他的母亲来自这个地区的一个石匠家庭。高斯的父母都没有受过太多教育；在之后的日子里，高斯将他1808年去世的父亲描述为一个诚实、勤奋，但是专制、粗野、狭隘的人。高斯更加喜爱和尊敬的是他的母亲。

高斯似乎有着非凡的记忆力，他从很小的时候就显露了在计数和算术方面的特殊才能。据说他还不会读书时就会计算了。他7岁进入学校，在那里他的能力被一些老师发现了，他们对他的学业特别关注。他们劝说高斯的父亲允许他升入当地的文理中学，那里的课程虽然有些守旧，但是课堂有序且班级不太大。高斯在那里学习了当时科学家所必需掌握的拉丁语，也学习了官方的高地德语。他对语言学有强烈的兴趣，而他更感兴趣的则是数学。高斯14岁时被引介给当地的统治者不伦瑞克公爵(Duke of Brunswick-Wolfenbüttel)，高斯的才能打动了公爵，于是公爵给高斯一小笔生活津贴。不伦瑞克当地著名的卡罗林姆学院的一名成员向他提供了进一步的鼓励和帮助。

在15岁时，高斯成为这个先进的、以科学为导向的学院的学生，该学院在同类学院中是数一数二的。学院有一个较好的图书馆，尽管它只有一部分科学经典具有代表性。高斯当时所研究的著作中有一本是牛顿的《自然哲学的数学原理》。很快高斯就开始有自己的想法了，尽

管他经常在事后得知他发现的都是前人已经知道的。在18岁那年,他的能力对进入大学来说已经绰绰有余了。此时,高斯才最终下定决心以科学而不是语言学为专业。虽然不伦瑞克的黑尔姆施泰特大学有一个很好的数学图书馆,但该学校不是以科学研究为导向的,于是高斯来到了汉诺威,更适合学习科学的格丁根大学在其南边约104千米。该学校又被称为乔治·奥古斯都大学,于1727年由英国国王、汉诺威选帝侯*乔治二世(King George Ⅱ)模仿牛津大学和剑桥大学而建立。这个新的科研基地吸引着来自德国各地及欧洲其他国家的学生。尽管它的资本更雄厚,且享有更大的自主性,但它在很多方面仍是当时典型的德国大学。

高斯就像往常那样,主要依靠自学,直到三年后回到不伦瑞克的家。此时,他已经形成了他几乎所有重要数学论文的基本思想。他的研究并不仅仅限于数学,他对语言学同样感兴趣。不论是用德语还是拉丁语写作,他都得心应手。他可以阅读当时科学出版使用的绝大多数语言,包括英语,到他晚年甚至又增添了俄语;在格丁根大学的俄国访问者眼中,他的俄语说得很流利。

高斯离开格丁根大学的原因我们不得而知,但是接下来在不伦瑞克的7年里他硕果累累。在继续资助高斯的公爵的要求下,高斯向黑尔姆施泰特大学提交了一篇博士论文,这篇论文在他本人缺席的情况下获得通过。他开始自立门户,结交新的朋友,并偶尔旅行。在职业上,他因只用尺规作出正17边形而吸引了格丁根大学的关注;他一直把这看成是他的主要成就之一。不过,这个早期的成就很快被他的第一部重要作品所遮蔽,他的不朽著作《算术研究》给索菲·热尔曼及任何一个可以理解它的人留下了深刻印象。这是第一次系统总结数论的尝试,前人的作品至多是将一些孤立的结果集结起来。总的来说,这本

* 选帝侯是德国历史上的一种特殊现象,指那些拥有选举神圣罗马帝国皇帝权利的诸侯。——译者

书是高斯的杰作,并使他闻名于世。不幸的是,该书刚出版其出版商就破产了,以至于有一段时间这本书无法获得。

在这段时期,高斯也对天文学产生了兴趣,他利用非常有限的观测数据成功地计算出谷神星的轨道,造成了轰动。刚开始他没有公开发表他的方法,这使得轰动更为强烈。这项杰出工作给高斯带来诸多荣誉,包括担任圣彼得堡天文台台长的邀请。公爵深以高斯为傲,为了鼓励高斯继续留在不伦瑞克,公爵提高了他的津贴,并且许诺为他建一个小型天文台。高斯一直将在这段自由的黄金时期中给他提供经济支持的公爵看作一个开明统治者的杰出典范。

1805 年 10 月 9 日,高斯与约翰娜·奥斯特霍夫(Johanna Osthoff)结婚,这是他第一任妻子,他们似乎在小时候就认识。在一封信中,高斯这样描述她:“她一方面拥有圣母般美丽的脸庞,平和的心态,健康温柔,略带梦幻的眼睛,无可挑剔的体态;另一方面又有聪明的头脑,富有教养的言谈;不过,一个不会伤害任何生灵的天使般安静、清澈、谦逊、纯洁的灵魂,才是最美之所在。”她对他们的住宿条件不太满意:“破旧又肮脏的房间,呛人又漏风的厨房,老迈又冷淡的房东和房东太太”。

正如我们所见,高斯在不伦瑞克期间的一个通信者是那位勒布朗,索菲·热尔曼使用的化名。我们在这里说几句高斯向他的圈内人所做的对她的评论。他对某个人说:“最近我很高兴地收到来自一个年轻巴黎数学家勒布朗的来信,他正逐渐熟悉高等算术且越来越感兴趣,并显示出他深刻理解了我的《算术研究》”;当热尔曼暴露了自己的真正身份后,高斯对另一个人说:“最近我回复了她的一封信,和她分享了一些算术知识,这使得我再次对此进行了研究;仅仅两天之后,我就做出了一个非常可喜的发现”;高斯还以类似的口吻跟其他人谈起过索菲·热尔曼。

不伦瑞克公爵不仅是艺术与科学的开明资助者,而且是一名优秀的军人。在奥斯特利茨战役的后续战斗中,他指挥普鲁士军队不顾一

切地阻挡法国军队，他在战斗中受了致命伤。在公爵经过不伦瑞克前往阿尔托纳的路上，高斯看到即将不久于世的恩人时潸然泪下。

由于失去了他所敬重的资助者，高斯现在需要一份正式工作，所以当下一年重返格丁根大学的机会来临时，他把握住了。一个新的天文台正在筹建，而高斯被任命为天文台台长。汉诺威这时处在法国控制下，但是法国人显示出治理上的无能，而当旧的政体在1814年恢复以后，行政效率才获得了大大提升。尽管高斯发现他的职责占用了大量时间，但是他这次回到格丁根大学仍然导致了很多新想法出现，例如他开始研究非欧几何学存在的可能性，虽然在该主题上他没有发表任何著作。尽管克莱因(Klein)认为高斯的英雄时代是在不伦瑞克度过的1798—1807年，但是高斯第一次在格丁根大学度过的1795—1798年也是非常富有成果的，而他在格丁根大学度过的第二段时间则没有如此有成效。

高斯婚后不久，妻子约翰娜就生了儿子约瑟夫(Joseph)，他在一些方面与父亲很像，接着又生了女儿明娜(Minna)，她很像母亲。不幸的是，约翰娜生下第二个儿子后不久，于1809年10月11日去世了，而这个孩子也只活了几个月。四年婚姻生活让高斯获得“难以置信的幸福”，妻子去世带来的悲伤把高斯击倒了。他含着眼泪写了好几页令人心碎的哀歌。

不过，他觉得不能让幼小的孩子长时间没有母亲，于是一年内他又结婚了。他的第二任妻子是弗里德里卡·威廉明妮(明娜)·瓦尔德克[Friderica Wilhelmine (Minna) Waldeck]，格丁根大学一名具有枢密顾问(Geheimrat)头衔的法学教授的女儿。她的社会背景与高斯非常不一样，高斯将她介绍给自己地位低下的父母时感到很尴尬。她很快为高斯生儿育女。1811年和1813年相继生了儿子尤金(Eugene)和威廉(Wilhelm)，1816年生了女儿特蕾泽(Therese)，之后他们在新天文台住下了。

法国政府在征收战争税上毫不迟缓，作为一个新任命的教授，高斯

很难承担。几个好心人愿意替高斯支付税款,这正说明高斯当时的声望不断增长。同时,新天文台的建设与配置尽管被政治动乱推迟,但是除了慢一点外进展还算令人满意。至于教学任务,高斯于 1810 年写道:“这个冬天我为三名学生讲授两门课,其中一名学生适度地准备了,另一名尚未准备好,还有一名学生既没有准备好且能力也不足。这就是一种数学职业的重担。”

在格丁根大学的最初几年里,高斯接到俄国塔尔图大学和德国柏林大学的教职邀请。前者被高斯拒绝了,而与后者的协商拖延了 15 年。柏林大学可能是对高斯很有吸引力的一个地方,到那里工作可以和一批出类拔萃的科学家成为同事。他的妻子明娜也希望搬去那里。协商于 1824—1825 年达到一个高峰,有证据表明高斯很可能会接受柏林大学的教职,如果普鲁士官僚没有那么拖拉的话。在汉诺威,尽管有时关键问题需要上报伦敦,但是做决定往往是迅速和明确的。将柏林大学与格丁根大学反复权衡,高斯决定留在现在的地方。

不要忘记,高斯的主要职务是格丁根天文台台长,而且他参与了一些诸如汉诺威大地测量的艰巨项目,这些项目占用了他大量时间和精力。1821 年,他有 6 个月时间在野外,之后的 4 年间也少不到哪里去。工作条件往往不好,有时甚至很恶劣。他对热非常敏感,有时热得难受。这些不仅仅是他谋生所要承担的责任,天文学和大地测量学也都是他终生的兴趣所在。

尽管高斯的第二次婚姻不能算不幸,但还是无法与第一次相比。在 1811 到 1816 年的 3 次生育之后,明娜变得异常虚弱。她越来越多地卧床不起,于 1831 年去世,可能是因为肺病。不幸的是,高斯的三个儿子都让他感到失望。最大的儿子约瑟夫,来自第一次婚姻,一度做过父亲的助手,然后开始了一段并不成功的军旅生涯,最终做了一个铁路工程师。尤金和威廉来自第二次婚姻,当与父亲的矛盾扩大后移民来到北美,矛盾尤其尖锐的是尤金,他似乎继承了父亲的一些禀赋。女儿特蕾泽和父亲待在一起,为父亲照料家务直到他 1855 年去世。高斯自

己的父亲1808年去世,9年后,他那几近失明的老母亲搬到她这个著名的儿子这里度过余生,这时候高斯已成为枢密顾问。

在第二任妻子死后,高斯变得越来越内向了,他晚年的忧郁可以追溯到这个时期。当人们来看他时,他会说起他年轻的岁月。当人们开始告诉他数学中的新发展时,他常常打断说,他很久之前就知道了。当他去世后,人们研究他的笔记本,发现在这一点上事实往往确实如此,尽管他在细节问题上并不总是准确可靠。他似乎对库默尔为复原唯一因子分解定理而发明的理想数不感兴趣,而当阿贝尔将自己关于一般五次方程不可解的证明发给他时,他也没有答复,尽管他私下里对阿贝尔的工作赞扬有加。

但是他生命余下的岁月并不全是忧郁的。1831年,威廉·韦伯(Wilhelm Weber)加入了格丁根大学,成为物理学教授。三年前高斯第一次遇见他时就对他印象深刻。韦伯后来表现得像高斯的一个儿子,他将高斯带入新的研究领域,并在一些科学研究的荒芜之地获得了有益的发现。他们使用一个"无铁"实验室,一起从事磁现象的研究,高斯在理论和应用上都对电报做出了贡献。不幸的是,1837—1838年的一场政治危机导致包括韦伯在内的7名格丁根大学教授失去职位。此风波之后,高斯的小儿子威廉移民去了美国。接着,高斯的母亲去世了,享年97岁,他第一次婚姻的女儿也随即去世了。总的来说,这是一段不幸的日子。

尽管他不喜欢正式的教学,而且给公众留下冷漠的印象,但在自己的小圈子里高斯的表现是不同的,他拥有与年轻人交朋友的罕见天赋。高斯圈子里的数学家包括他的天才门徒艾森斯坦(Eisenstein),高斯对他的英年早逝深表惋惜,另外还有戴德金(Richard Dedekind)、利斯廷(Johann Benedikt Listing)、默比乌斯(August Ferdinand Möbius)、黎曼(Bernhard Riemann)和冯·施陶特(Karl von Staudt)。此外,他的社交圈子还包括其他不是数学家的年轻人,这些人都可以去拜访他。除了与韦伯合作以外,将近晚年的高斯似乎总是单独工作,但是他似乎愿意

和年轻一代的人分享自己的想法。

终其职业生涯，高斯的课程主要是关于数学天文学的相当初等的层面，很少与自己的研究有关。戴德金是听过他课程的学生之一，我们将在第五章细说。此刻我们不引用戴德金的描述，而是引用听过同一门课程的另外一名学生的话：

我计划选修的冬季课程有施特恩(Stern)、韦伯、利斯廷和高斯的。我听了前面那几个人的课，但是高斯没有讲课。1850 年的夏季课程，高斯仍然没有讲课。1850—1851 年的冬季课程，高斯讲授了最小二乘法，我参加了。对我来说，我似乎在浏览讲授该课程的房间。我们这些听课的人围着一张放满了书的桌子坐着。高斯坐在桌子窄边一侧的一个扶手椅子上，在他旁边的黑板架上有一块大小合适的木质黑板，他在上面用粉笔演算。高斯戴着黑色的天鹅绒帽子，当他站起来时他的左手一直插在裤兜里。由于桌面空间太小，每个听课者都没法用墨水写字，高斯甚至不喜欢大家用铅笔做笔记。有一次当我们想做笔记时，他说："这里不需要记笔记，注意力集中。"

高斯到了晚年，当他的原创性数学创造力衰退时，作为替代的是实验性的科学工作，接着这也结束了，高斯应用他的实践技能和知识来分析大学教职员工的退休金，并得出了满意的结果。特别是，为格丁根大学教授的遗孀们提供了生活必需品。他同时也是个人财产方面的成功投资者，除了他的儿子可能找他要钱外，他没有经济方面的担忧。他嗜好阅读，拥有一个宽敞的图书室，其中有英国优秀作家的作品和不少于 75 册的俄文著作。他喜欢历史作品，偏好有幸福结局的小说。他富有幽默感的例子经常被人引用。

他的一个老朋友写道："他充满朝气，所以即使在他年老直到死亡期间，他都仍然是那个真挚单纯的高斯。一间小书房，一张小绿皮工作台，一个白色的立桌，一个窄小的沙发，他 70 岁之后加上一个扶手椅，

一盏罩灯,一间没有暖气的卧室,简单的食物,一件睡衣和一顶天鹅绒帽子,这些就是他所有的需求。"英国日记作者赫斯特(Thomas Hirst)在高斯晚年拜访过他,并记录道:"从个人特质上说,他是一个令人崇敬的老家伙,一副心满意足的样子,很有男子气概。他有着非凡的力量,他的每一个词都毫不费力地向人显露出强壮的力量。他大约80岁了(实际上75岁),但是他完全没有老弱衰退的迹象。他甚至可以不戴眼镜进行阅读……他一开口,我就感觉到很轻松。"

用作这个传略的插图的这幅肖像是1828年的,绘于高斯约50岁时,但是显得较为年轻。他身高略超过1米50,体格强壮肌肉发达。他的蓝眼睛清澈有洞察力,他的相貌是典型的低地德语区人。尽管他总是担心自己的健康,但是直到1825年他才开始有哮喘和心脏问题。除此之外,他所经历过的仅有的病症是热过敏,以及1838年的短暂失聪。他很酷,也很有判断力,而且有很强的自律精神。

高斯获得过很多学术和其他方面的荣誉。在后来的岁月里,他总是被称为枢密顾问高斯。1804年他当选伦敦皇家学会的外籍会员,主要原因是他在计算谷神星和智神星轨道时显示的强大能力,他又于1838年获得科普利奖章。1854年,格丁根大学为他举行科学生涯庆典,庆祝他的博士论文提交五十周年,这是德国大学的习俗。在场的狄利克雷看到高斯正试着用一页《算术研究》的原始手稿点燃烟斗。深恐亵渎圣物,狄利克雷抢救了这张纸,之后珍藏了起来。同年,高斯参加了一次少有的短途旅行,去看新修建的通往卡塞尔的铁路。他所乘马车的马被火车惊吓,他被从车里甩了出来,虽然没有受伤但被吓坏了。有很多讲述高斯人生各阶段生活的故事,其中一些故事和欧拉的很像。

尽管高斯抱怨着自己脑力和体力的衰退,他的健康状态对这个年龄的人来说还是挺好的,直到心脏扩大导致了血液循环的问题。他去世前的那一年,黎曼首次登台做了关于几何学基础之假设的演讲,这令高斯非常高兴。当时发生的情况将在下一章黎曼的传略中描述。韦伯

当时在场,他记录下当他们一起走回家时高斯有多么兴奋。高斯当时尽管已经病了,但对数学思想与自己很接近的黎曼赞不绝口。之后不久,高斯就无法出门了,连走路都有困难,1855 年 2 月 23 日,这位最伟大的德国数学家在睡眠中去世,享年 77 岁。

高斯保持着活跃的科学活动。在数学中,他最早研究的是数论,接着扩展到代数、分析学、几何学、力学、天体力学、概率论、误差理论,以及精算学。在纯粹与应用科学中,高斯的兴趣包括观测天文学、测量学、大地测量学、毛细现象、地磁学、电磁学、光学,以及科学装备的设计。在数学中,高斯的研究工作的穿透性给人留下最深刻的印象;在科学中,则更多的是其精湛的技艺。牛顿首先被看作是一位物理学家,其次才是数学家,对于高斯来说则恰好相反。与牛顿一样,高斯讨厌论战,也不太情愿发表自己的发现。在 40 岁那年,高斯描述了自己的态度,至少是在数论方面:

> 高等算术的特征是,很多最美妙的定理可以轻松地通过归纳发现,但其证明却不容易,往往是在经过很多徒劳无功的研究之后,通过深入的分析和幸运的组合才得以解决。这个重要的现象发生于该数学分支不同思路的美妙串接中,而且经常会发生的是,许多定理的证明历经数年寻求无果,之后却被以许多不同的方式证明。一旦通过归纳发现了一个新结果,你必须把用任何可能的方法寻找一个证明当成首要任务。但是在这样的好事发生之后,你不可以在高等算术中把该研究封闭,也不可以把寻找其他证明看成多余的奢侈。因为有时候人们第一次找到的不一定是最美妙最简单的证明,而正是对高等算术中各结果之美妙串接的洞察,成为研究的主要吸引力,并且经常导致新结果的发现。由于这些原因,寻找已知结果的新证明往往至少和发现结果一样重要。

高斯是一个完美主义者,因为他并不总是发表自己的工作,他越来越多地发现别人再次独立地发现他未发表的结果。通常的情形是,当

两个人获得同一个发现时，优先权取决于发表的日期。但是，高斯会要求结果的优先权，即使他只告诉了一两个人他的发现。有时，甚至当他没有告诉任何人，而仅仅把发现写入笔记本时也会这样做。

高斯对于优先权问题的态度特别让勒让德不悦。例如，勒让德猜测并部分证明了二次互反律，但是当高斯给出完整证明的时候，仅仅含糊地提及勒让德的贡献。之后，当勒让德第一次发表最小二乘法的工作时，高斯写道自己10年前就知道该方法了。尽管这当然是真的，但关键在于当时他并未发表。

高斯的论文集包括300多篇论文，很多是用拉丁文写的。他未发表的笔记被历史学家仔细考察过，但是还有很多有待解读的问题。他那大量专业的和私人的信件被细致地研究了。这些信件揭示出一位兴趣广泛的人，他对世界上很多事情的判断大都可靠。不过，他强烈的保守观点形成于18世纪。内战与其他政治暴行给他带来了"无法描述的恐惧"。描述高斯勤勉的言行录夸大了他生活与工作的一些方面，但是高斯自己所说的话不应忘记："如果其他人对数学真理有和我一样深刻持久的思考，他们也会做出我的发现。"对于被他称为"发现"的那些在许多特例中被证实的结果，我们现在或许倾向于称为"猜想"。

至于高斯与他的前辈，特别是与欧拉的工作比较，英国数学家史密斯（Henry Smith，他的传略在第五章）的一段文字对此有所启迪：

如果我们不算上伟大的牛顿（高斯本人也是乐意这样做的），可能任何一个时代任何一个国家的任何一个数学家都无法在发明的硕果累累和证明的正确性方面超越高斯，古希腊人也会对此感到嫉妒。并非贬低如欧拉、柯西这样伟大数学家的地位，应当承认，这些人被自己创造的丰硕成果淹没，沉迷于他们所取得成果的附加利益，他们并不非常在意将他们的想法用严谨的逻辑顺序理清，甚至建立一个无可辩驳的证明，让他们凭直觉感受到和看到的结果站稳脚跟。对于高斯，情况则不同。这看似矛盾，但可能却是真实的：正是在形式上进行逻辑完善的

努力，导致高斯的作品容易受到非议，说它们晦涩难懂，增加了不必要的困难……所作的每一个论断都被充分证明，不同的论断一个接一个以正确的逻辑顺序排列；目前我们没有什么可以抱怨的。但是，当我们精读完他的作品以后，很快开始感觉到我们的工作才刚刚开始，我们仍站在神庙的入口，有一个秘密被隐藏在幕布背后。获得这些结果的过程没有什么迹象遗留下来，或许连启发这些证明的接续步骤的因素都无迹可寻……另一方面，如果我们阅读欧拉的研究报告，会看到行文中有一种自由与华丽的优雅，这表明欧拉在他研究工作的每一步中都享受着喜悦。但是我们仍然可以意识到我们和高斯的那些严格宏伟的设计之间有相当大的距离，这是他伟大努力的特征……从高斯关于如何评价一个数学家来说，这并不是最高要求，但似乎也不是最低要求，通过对科学之广阔的深刻洞察，他在其中每一个部分都力求极度的严谨性，绝不会把困难当成不存在一样去忽略它，而且在一个定理被真正证明之前绝不把它当成是成立的。

泊松(1781—1840)

在本章的剩余部分，我们将重新返回法国。前面已经多次提到西梅翁－德尼·泊松(Siméon-Denis Poisson)的名字了。泊松一生毁誉参半，特别是在他的祖国。他迅速攀升到一个既有权力又有影响力的高位，他自视为法国科学界的不二领袖，并为增进科学界的权益努力工作。他尽其所能地阻止法国大革命和拿破仑时期的教育改革在王朝复辟后遭到破坏。

西梅翁·泊松(Siméon Poisson)和弗朗舍泰尔·泊松(Francheterre Poisson)住在皮蒂维耶，大约在巴黎南面 80 千米处。1781 年 6 月 21 日，他们的儿子西梅翁－德尼出生。父亲西梅翁之前是一名普通士兵，他在部队里饱受贵族的傲慢冷遇，于是他用退役换取了一个小小的行政职位。出于对法国大革命的热情，他成了皮蒂维耶的治安官。在这



个职位上，他收到了许多份《巴黎综合理工学院院刊》（*Journal de l'Ecole Polytechnique*），而他的儿子是这些刊物的忠实读者。部分由于经济上的原因，小泊松被安排去枫丹白露，与一个从事外科医生工作的叔叔生活在一起。本意是想让他朝医学的职业生涯发展，但他即使看到最小的手术都会感到晕眩。他对医学检验工作的反感以及他在这个领域的能力缺乏，成为他向科学领域发展的决定性因素。当地学校的一位数学老师恰好是拉普拉斯的朋友。由于对泊松的天赋印象深刻，他鼓励这位年轻人尝试去考巴黎综合理工学院。泊松在当年入学考试中的表现无疑是最好的。他于1798年被录取。作为一个来自外省的新生，泊松很快适应了首都巴黎的生活。

在巴黎综合理工学院，拉格朗日刚刚开始教授解析函数课程，他发现泊松学习很专心，还经常在课堂上给出很中肯的评论。不久后，泊松的同学们于课后待在泊松的房间里，让这位天赋异禀的同学帮他们解释更多课堂细节，这几乎成了惯例。这件事情引起了拉普拉斯的注意。拉普拉斯发现某个学生解决一个疑难问题的方法非常巧妙且新颖，便问他这个方法是否为他原创。这个学生回答："不，我是从泊松那里学来的。"巴黎综合理工学院官方允许泊松不用修完规定的正式课程，让他能够深入进行自己的研究。

无论是在私人关系上还是在专业上，已经有许多文献论述了拉普拉斯与这位才华横溢的年轻人之间的密切联系。在为拉普拉斯写的悼词中，泊松提到："在我年轻时他曾经欢迎我，他经常赠予我热忱的友谊，与他的思想交流在许多不同场合都使我的推理更加清晰……"傅里叶也早早认可了泊松的数学才华。尽管他们后来有很多意见分歧，

傅里叶却从未失去对泊松作为一个数学家与物理学家的才能的深深敬意。

还在巴黎综合理工学院的时候，泊松住在蒙日以前的一个学生家里，这个学生名叫阿谢特(Jean Nicolas Pierre Hachette)，他对泊松早期的职业生涯有过帮助。泊松1800年刚一毕业就担任了助教，两年内他已经成为了副教授。他于1803年成为巴黎科学普及学会的一员，后来成为该学会那实用的公报的编辑。1806年，泊松接替傅里叶成为巴黎综合理工学院的名誉教授，他同时也在法兰西学院作为比奥的代理。不只阿谢特和拉普拉斯是他的贵人，经济学家、哲学家和空想社会主义者圣西门(Saint-Simo)告诉我们，他资助泊松一直到这个年轻人能够自立为止。泊松成了圣西门创建的免费学校的校长，在这个学校，尽管开设的课程模仿自巴黎综合理工学院，但有一个重要的区别是，学生们获准以教书谋生。

由于在一个同情法国大革命的家庭中长大，泊松来到巴黎综合理工学院后很容易接受"社会主义者"的思想，并且在他任教的最初几年，就成了激进学生的一个非正式导师。这个群体常常急于表现出自己对拿破仑的不尊重。1804年，泊松阻止学生发表一份反对帝国公告的请愿书。他的这个举动让母校避免了一场危机，而他的所作所为没有被忘记，后来他成为拿破仑科学智囊团的一员。

因此，到1806年，泊松已经有了稳固的根基，获得新职位指日可待。1808年，他获得了法国经度局的职位，并且后来在那里成为拉普拉斯的继任者，翌年他又获得了巴黎大学的力学教授职位。自1812年起，作为阿尔克伊学会最活跃的初级会员之一，他构建起了后来被证明对他的职业生涯最为有用的友谊。1812年他入选巴黎科学院，帝国的认可很快随之而来。同一年，他接替勒让德成为炮兵学校的主考官，三年后，他成了巴黎综合理工学院的毕业主考官，并且直到去世他一直占据这一职位。

大约从这时开始，泊松与傅里叶的关系开始恶化。我们知道，傅里

叶在1812年的有奖竞赛中阐述了他的热理论，这个理论当时尚未发表，但是泊松看过傅里叶的手稿。在泊松发表了一个他本人的热理论概略之后，傅里叶写信给拉普拉斯："泊松太会将自己的才华运用于别人的工作之上了。将才华用于发现已经知道的东西，是一种浪费……他还补充说，他的方法确实与我的不同，而且那是唯一有效的方法。但是我不同意这两个观点。关于他的第二个观点，这是数学界闻所未闻的。如果泊松想让其他人接受它，他必须从自己的研究报告中抹去它。[接下来傅里叶继续指出泊松的理论缺陷。]"泊松接受了这一批评，但是接下来在傅里叶发表他的研究报告之前，泊松发表了该主题的三篇更进一步的研究报告。这类事情在泊松的职业生涯中屡见不鲜。

尽管泊松在法国科学界内部非常活跃，但他好像更喜欢逗留在科学界的边缘。泊松经常关注当代数学物理和数学界的成果，他只愿意质疑和批评那些看起来与他的想法不一致的方法。泊松独自工作，并且越来越亢奋，他努力用自己的方式来解决物理学中的主要问题。

在1840年利布里写的悼词中，可以一窥泊松的工作方式：

泊松从来没有指望自己在同一时间内投入到两件事情中去。在他努力工作的过程中，当一项研究计划掠过他的脑海，如果它与正在进行的工作没有直接的联系，那么他就会在他的小皮夹里写上几个词来使自己感到安心。与他经常交流科学观点的人知道，他一完成一篇研究报告，就会毫无中断地转去研究另一个课题，而且他通常会从他的皮夹中选出一个可以使他投入其中的问题。用这种方法事先预见一个可能有机会成功的问题，并且在集中精力处理这个问题之前能够等待，证明了他的头脑既富有洞察力又有条理。

泊松并不觉得自己需要对拿破仑政权特别忠诚，而且很轻松地适应了拿破仑政权的倾覆。1814年路易十八的复辟没有给他的职业生涯造成阻碍，他只是继续承担了新的官方职责。其中最重要的是皇家

公共教育委员会的任命，这使他能够监管全法国的数学教育；还有1829年皇家大学委员会的任命，这使他在最高级别的关于国家教育体系的争论中拥有了发言权。这一任命在一个关键时刻下达，当时路易十八的保守派政府正要着手开展一项运动，来反对法国大革命和拿破仑时期的科学规划及政策。在他的同事们，尤其是安培的支持下，他设法抵抗住了这场压力。

在其他地方承担重大责任的同时，泊松在科学院内部的影响力也不断增强。1827年拉普拉斯去世后，泊松感到自己有责任追随恩人拉普拉斯提出的思想，在其科学遗产上获得进一步发展，而与此同时，他也在进行着大量的其他研究。不久以后，他开始视自己为法国顶尖的数学家。在他生命的最后十年，除了完成他所有的其他工作以外，他还发表了许多著作。这些书被看作是主要与教育方法相关的著作。它们包括对所选课题的有价值的历史研究，但很少提及现有研究的进展。

为了对泊松的研究贡献作一个公正的评价，我们应当多看看泊松那数量众多的文章和研究报告。泊松本人列出的著作清单长得惊人。不过在引用自己的研究报告时，他也列出了大量来自它们的摘要。即使把这些全部去掉，还剩下几乎300个标题。1874年一位匿名评论家写道：

一位数学家的声望的确依赖于他杰出的分析能力。对实验科学家来说，当他的物理发现由分析家用令人费解的表达式表示出来时，他一般不能判定他从中获得了多少帮助……对门外汉来说，数学家工作中最引人注目的是做变换的艺术，尽管这本质上几乎没有任何价值。泊松非常擅长此道。他让大家惊讶，并被认为是个大人物。然而，一个科学家想要让人记住，需要有自己的思想，而泊松只有其他人的思想。而且，当他不得不在两个对立的思想之间做出选择，以便用自己的分析手段来抬高其身价时，他通常做出错误的选择。

虽然这种抨击无疑是不公平的,但也包含部分实情。不知疲倦地操纵公式是他的专长。后来雅可比宣称,自《天体力学》第一版问世后,泊松在运动方程的变换方面做出了最重要的进展。正如我们即将看到的,哈密顿和其他人从泊松在创建数学技术的计算中获得了灵感,这种数学技术为19世纪末的理论物理学大发展奠定了基础。

数学家和哲学家库尔诺(Cournot)对泊松非常感激,并在泊松生命的最后十年里与他关系亲近。库尔诺说,泊松"在所涉的计算中渴望检验所有的问题,尤其是那些对自然哲学意义重大的问题",他表现得比别人更加"手段丰富、适应力强和足智多谋"。尽管如此,或者说正因为如此,泊松没有享受到那种少有的好运,即开创一个全新的令人震惊的概念,并永久地载入科学史册。他在自己的道路上稳步前进,而不是跨越到一个新的领域。

库尔诺也给出了他对泊松的个人印象,描述了泊松渴望成为一个将高深智慧与大量常识微妙结合起来的宽容、正直的人。鉴于泊松在科学界享有的杰出声望,保皇党非常乐意将他的保守观点看作保皇主义。1825年泊松被封为男爵,对于这个头衔,他既不接受也不拒绝。1830年革命爆发时,泊松担心他可能会丢失一些他已经积累的地位;不过奥尔良派的路易-菲利普国王(King Louis-Phillipe)反而任命泊松为贵族院成员。他接受了这一职位,在政治上没有表现得那么墨守成规,因为他不愿忽略任何可能提升科学利益的机会。

泊松参与活动的多样性,或许可以看作他没有享受到库尔诺所谓的好运气的原因。一直以来,他经常以一种肆无忌惮的方式利用其他科学家的观点。我们已经看到一些这样的例子,比如热尔曼在弹性理论方面的工作,以及傅里叶在热扩散理论方面的工作。即便如此,他通常是第一个充分理解新研究的全部意义的人,他为传播新思想做了很多事情。至少在他职业生涯的早期,他的目标是将数学的应用拓展到解决物理问题中去。他展示的不仅仅是熟练的计算。他的形式体系化意识使得他能够发现类似性,将以前认为不同的课题统一起来。但是,

后来这差不多演变成了仅仅用于数学分析运算的独特能力。

我们稍后将会看到，由伽罗瓦导演的一出众所周知的言辞激烈的长篇演说主要就是针对泊松。伽罗瓦指责泊松不能或不愿意理解他，并写道："分析家们徒劳无功地试图隐瞒他们不会推理的事实：他们组合，他们拼凑……当事实真正摆到他们眼前时，他们也会在摸索前进的道路上被它绊倒。"的确，泊松组合了很多，拼凑了很多，并且频繁地被绊倒，但他也经常猜对。他在改变处理问题的方式、塑造和重新塑造公式，以及将别人尝试过的材料转换成自己的数学技巧能够适用的素材等方面，都有着巨大的热情。这种热情招致了批评和讽刺，然而它确实来源于真正的才能，一种能够激发实验方法的才能。

泊松在晚年一直致力于保卫科学，正如他为了教育的利益所做的工作一样。库尔诺写道，"在泊松生命的尾声，当说话对于他来说都非常痛苦时，我看到他由于自己作为一个竞争性考试[教师资格考试]的主考所经历的懊恼而几乎要哭出来，因为他越来越确定，我们的年轻老师只关心获得一个岗位，而根本不热爱科学。"

至于泊松的私人生活，没有多少好说的，他是一个十足的工作狂。"生命中只有两件乐事，"泊松经常说，"研究数学和讲授数学。"据报道，他用自己的储蓄做了一笔不明智的投资，导致他陷入焦虑的状态好多年。年轻时他曾参与巴黎的沙龙和戏剧。他熟知莫里哀(Molière)、高乃依(Corneille)等人的作品，特别是拉辛(Racine)的悲剧。据阿贝尔说，泊松个子不高，"有一个可爱的小肚子"；萨默维尔则认为他精力充沛。1817 年，泊松与南希·德·巴尔迪(Nancy de Bardi)结婚。南希出生于英国，父母是法国人。他们有四个孩子，两子两女。婚后泊松决定放弃与他的工作无关的社会活动，并与家人一起度过自己少得可怜的闲暇时光。泊松每天早早离家开始他的研究，并且直到晚上六点钟都闭门谢客，那个时刻他会与家人共进晚餐，度过一天中的剩余时光，或者与几个老朋友玩几局惠斯特牌。他买了一座农场，离巴黎不远，但他从未去看过。

1838 年秋，泊松知道自己得了一种结核病。他试着约束自己，在一段时间内放弃一些职责，但是当他的身体状况略有改善，他就又重新投入到工作中去了。不够明智的是，尽管抱病在身，他还是与以往的 22 年一样，尽力主持巴黎综合理工学院的期末考试。然而，泊松的身体无法胜任近一个月的几乎每天 10 小时的工作量，这样的努力导致了中风，带给他最后一击，他全身虚脱且再也没有恢复过来。1840 年 4 月 20 日，泊松在巴黎逝世。

彭赛列(1788—1867)

虽然法国的政治形势并不稳定，但泊松的事业并没有受到影响，这与如今的典型成功学者并无多大不同。他的同胞让·维克托·彭赛列(Jean Victor Poncelet)就没那么幸运了，彭赛列在其职业生涯中不得不克服重重困难，但他都坚决地做到了。彭赛列通过将工业应用引进原本纯属理论研究的力学，而革新了该学科的教学。不过，他的主要名声在于他是复射影几何之父。



彭赛列 1788 年 7 月 1 日出生于梅斯，那是摩泽尔省的首府。他比泊松小 7 岁。他是富有的地主和律师克劳德·彭赛列(Claude Poncelet)与安妮-玛丽·佩兰(Anne-Marie Perrein)的私生子(后来合法化)。婴儿时他就被寄养在养父母家，在梅斯东边的圣阿沃尔德镇。1804 年，在他 16 岁时，他回到梅斯，在梅斯国立中学念高中。

在法国教育体制下，有两种学校提供中等义务教育：国立中学和市立中学。前者享有更好声誉，因而也更难进。中小学教育从 6 岁开始，

一直延续到18岁的高中毕业会考。而后学生可以继续上大学，或者准备参加精英院校的入学考试，这些精英院校专门培养法国的知识精英。与普通大学生不同的是，那些被精英院校录取的学生成了公务员，有一份小薪水。他们被强制要求为国家服务十年，其中包括在校学习的那几年。有一些国立学校，如梅斯国立中学，有专门的班级帮助学生准备精英院校的严格入学考试。

1807年，彭赛列考入巴黎综合理工学院，他的老师有蒙日、拉克鲁瓦、安培、普安索(Poinsot)和阿谢特。因病休学耽搁了一年后，他毕业时已经22岁，并应征加入工程兵部队。在梅斯经过两年的训练之后，他所接受的第一项任务是参加战略要地荷兰瓦尔赫伦岛的防御工事建设。随后他被派到参与损失惨重的俄国战役的工程参谋总部。在从莫斯科撤退的途中，他在1812年11月的克拉斯诺夫战役中被俘，并被押送到伏尔加河下游萨拉托夫的一个营地，作为人质在那里度过了以后的18个月。虽然身遭囚禁的环境很恶劣，他还是能够利用他的强制闲暇时间来思考数学，特别是几何学。没有任何参考书，他首先必须重建纯粹几何与解析几何的基础。他发现，尽管他学过的数学细节已在他的记忆中模糊不清，但那些基本原理还如以往一般清晰。之后他构建了关于圆锥曲线和圆锥曲线系的射影性质的一些原创思想。这一时期的笔记(他后来称之为萨拉托夫笔记)经过整理，在50年之后作为他的《分析与几何的应用》(*Applications d'analyse et de géométrie*)的一部分于1862年发表，他在那本书中阐述了作为战俘的他得出的一些思想所引出的理论。

1814年9月回到法国之后，彭赛列被任命为故乡梅斯的工程兵部队上尉。在接下来的十年里，他在那里负责组建一个兵工厂，并参与了多个有关测绘和军事防御的项目。结果，他对军事防御和工程力学有了全面的认识。

不过，作为一名军事工程师，彭赛列仍然有充足的时间来继续从事在被俘虏期间开始的射影几何学研究。从1817年起，他在《纯粹与应用数学年刊》[*Annales de mathématiques pures et appliquées*，简称《数学年

刊》，这是数学家热尔岗（Joseph Diaz Gergonne）创立并编辑的一个短命的数学研究刊物］上发表了几篇关于几何学的文章。随后在1820年5月，彭赛列向巴黎科学院提交了他关于圆锥曲线射影性质的重要论文，描述了他关于复射影几何的新理论。不幸的是，科学院指定的评审人柯西，对彭赛列的方法并不信服。尽管柯西比彭赛列年轻，但作为一名院士，他的意见很有分量。多年以后，彭赛列依然记得1820年6月某日柯西接待自己的情形：

我试着走近塞尔彭特街7号，我那过于严格的评审人的住处。在他正要前往圣叙尔比斯教堂时我赶上了他。在这段短暂急速的步行中，我很快意识到我没有办法赢得他对我作为一个科学家的好感与尊重，甚至不大可能让他理解我。作为卑微的论文提交人，我只能恭敬地告诉他，他之所以会认为我将连续性原理引入几何学会引发争议和困难，是因为至今为止人们对符号法则没有给予充分关注……我解释说，我本应该在与科学院通信之前先对这个法则做些数学讨论的，我希望这个受尊敬的人给我一点时间允许我继续讲下去。然而，他不让我再说什么，就突然离开了……

从莫斯科撤退和俄国战俘营中幸存下来的彭赛列，并没有因为柯西的无礼而退却。在确信自己是对的以后，他坚持了自己的立场，只是重写了1820年的论文，并将它作为《论图形的射影性质》（*Traité des propriétés projectives de figures*）的第一节。这部问世于1822年的著作包含了许多重要的观念、思想、方法和原创性内容，对射影几何学的后续发展发挥了决定性的作用。例如，他的互反理论成了对偶原理的前身。在职业使命之外，彭赛列继续从事几何学研究，他随后开始准备另外4篇重要的研究报告。前两篇在1824年3月提交给科学院。

两个月后，经过许久踌躇，彭赛列终于同意出任皇家军事工程学院的应用力学教授，这是蒙日职业生涯启航的地方。职业生涯的这一重

大变化，导致他的几何学研究进展被打断。由于柯西的反对所导致的出版滞后，彭赛列发现他的一些最重要的思想正在被热尔岗和其他人接手，其中最为明显的是德国几何学家、物理学家普吕克（Julius Plücker）。由此引发的优先权争论给他带来了大麻烦。最后，他把自己苦心经营的理论放弃给他的对手，只是在偶尔捍卫某些特殊思想时才会回到这一主题。

皇家军事工程学院从梅济耶尔搬到了彭赛列的家乡梅斯，他很快就在那里全神贯注于他要讲授的新学科，以及应用力学的其他各个方面。他已经开始研究某些类型的机械，致力于提高其效率，并开发了可变配重吊桥的一种新设计。1824 年夏，他完成了他的第一项主要发明，设计并制造了一架曲面叶轮的下射水车，其运行效率大幅度提高。他描述这项发明的论文赢得了巴黎科学院 1825 年的一个力学奖。他还进行了几个实验，如关于从大闸口排放水的规律，以及水面涟漪的形成。

尽管彭赛列的大部分时间用于完善其理论力学课程，以为皇家军事工程学院培养未来的军事工程师，他还是为当地的工匠开设了一门叫工程数学的初等课程。这得益于他的实践经验，他在 1825 年曾到法国、比利时和德国的主要工厂参观学习，以研究它们所使用的机械。这使他重新思考，从将理论结果应用于工业的角度来表述各个力学原理。

1830 年，彭赛列成为梅斯市议会议员，并担任摩泽尔省总理事会的秘书，因此更多地涉足公众生活。然而几年以后，他觉得有必要搬到巴黎去，他在科学院开始活跃起来，并在 1834 年当选为院士。第二年他与戈丹（Louise Palmyre Gaudin）结婚。他作为温和的共和主义者被选为制宪议会的摩泽尔省代表。他应邀在巴黎大学开设一门物理力学与实验力学课程，那时力学一直被当作一门纯理论学科来教授。彭赛列同时还引进了工业方面的应用。1841 年，他出版了《物理和实验工程力学导论》（*Introduction à la mécanique industrielle physique ou expérimentale*），它很快就成为了标准的教科书。

此时彭赛列已经接近从工程兵部队退伍的正常年龄，但他的职业

生涯绝没有结束。他被委派到一个课程改革委员会。他成了法兰西学院下设的一个短命的管理学院的力学教授。同时他被提升为准将，并被任命为巴黎综合理工学院的院长。他将日常的行政事务委托给一名助手，以便能全身心地致力于课程改革。为确保有时间完成新的使命，他放弃了大学的工作。

与此同时，法国的政治开始紧张起来，1848 年的二月革命导致了路易－菲利普出逃英国，随后一个新共和国 * 宣告诞生。然而，领导起义的激进分子被中产阶级温和派排挤出权力圈。同年晚些时候的另一场起义则被军队镇压了。彭赛列本人不得不直接出面干涉，限制巴黎综合理工学院的师生在那一年各事件发生时的活动。1850 年末，彭赛列作为他们的校长退休了。

从 19 世纪初开始，工业设备在设计上取得了巨大进展，彭赛列在接下来的 7 年里致力于将这些进展写进报告。新型机械的样品在 1851 年的伦敦世博会及 4 年后的巴黎世博会上展出，彭赛列是巴黎世博会的组织者之一。直到那时，彭赛列才回到几何学，将他早期的论文汇集在一起，写了一篇挑起争论的序言，并以四卷本出版，其中最后一卷在 1866 年问世。第二年，即 1867 年的 12 月 22 日，彭赛列在巴黎去世，享年 79 岁。

不幸的是，彭赛列的大部分手稿及其他论文在第一次世界大战中遗失，因此那些可能对了解他的工作与生平有价值的材料丢失了。他所发表的东西主要涉及他的几何学思想，对他将力学从一门纯理论学科转变为一门实用学科的努力则很少论及。随着时间流逝，射影几何学的基本重要性越来越明显。正如我们将在第八章看到的，在彭赛列灵光一闪将近一个世纪以后，当维布伦（Veblen）和杨（Young）写下这个最合乎逻辑的学科分支的现代阐述时，他们坚称射影几何学的基础

---

* 即法兰西第二共和国，1848 年 11 月 4 日到 1852 年 12 月 2 日期间统治法国的共和政体。——译者

乃是所有几何学的基础。

柯西(1789—1857)

我们第二组主人公的最后一位是奥古斯丁 - 路易 · 柯西(Augustin-Louis Cauchy)。他是他那个时代最伟大的法国数学家,是欧拉、拉格朗日、拉普拉斯和18世纪其他伟大数学家的传人。他引领了被称为数学严密化的第一次革命。他对几乎所有的数学分支都做出了重要贡献,他引进的许多想法成了现代数学的根基。柯西不像是数学的主人,数学才是柯西的主人。他在政治和宗教方面则非常保守。



柯西1789年8月21日出生于巴黎。由于几个月前法国大革命突然爆发,他父亲路易 - 弗朗索瓦(Louis-François)丢掉了在巴黎警署的法律工作。柯西满月后受洗并取名奥古斯丁,而姓名中的路易则是承父名而来。他的母亲玛丽 - 马德莱娜[Marie-Madeleine,娘家姓德塞斯特(Desestre)]来自一个富裕的巴黎中产阶级家庭,她生有6个孩子,奥古斯丁是老大。1794年,柯西一家逃到阿尔克伊的乡下住处以躲避雅各宾专政的恐怖统治。我们已经知道,贝托莱和拉普拉斯都在阿尔克伊有房产。小柯西得益于结识他们,以及一些来拜访他们的有名望的科学家。特别是,拉格朗日对他的能力印象深刻,并对他的教育产生了兴趣。

两年后,柯西一家回到巴黎。父亲在新政权下开启了他的新生涯,他被任命为新组建的参议院的秘书长,一个既有权势又有利益的职位,而拉普拉斯是参议院议长。参议院位于卢森堡宫,柯西的家则在图尔农街附近。在拉格朗日的建议下,小柯西进入开明的先贤祠中心学校

学习人文学科。法国教育体系的一个特点是，每个学科都有年度的国家级竞赛，全国所有中学的高年级学生会接受同样的测试。柯西赢得了他那一年最优秀学生的大奖。

柯西 16 岁时进入巴黎综合理工学院，他期望成为一名土木工程师。两年后，他进入巴黎路桥学院又学了两年，然后在巴黎地区的工地完成了他的实践训练。1810 年，他通过了初级工程师的认证，于 21 岁*时离开巴黎来到瑟堡，在莫莱伯爵（Count Molé）手下参与建设一个海军基地——拿破仑港。这项大工程于路易十六在位时启动，旨在为法国在英吉利海峡提供一个基地，以便实施对英国的军事行动。

柯西随身带了 4 本书到瑟堡：拉普拉斯的《天体力学》、拉格朗日的《解析函数论》（*Traité des fonctions analytiques*）、肯皮斯（Thomas à Kempis）的《效法基督》（*Imitation of Christ*），还有维吉尔（Virgil）的著作。他在瑟堡待了近 3 年，获得了作为一名工程师的实践经验。虽然他的工作被高度认可，但他发现这一工作对他的身心都构成了负担，而他从来不算健壮的身体也开始变差。与此同时，他在瑟堡的工作之余开始研究数学，当他因病返回巴黎时，他做出的一些非常重要的发现引起了巴黎学术界的注意。

回到亲密的家庭生活以后，柯西恢复了健康，并在 1812 年完善了一篇关于对称函数的重要研究报告，其中包括了最终发展出群论的基本思想的萌芽。在 1815 年发表的这篇早期研究报告中，他充分利用了当时比较新颖的高斯的方法，推广了数论中拉格朗日和鲁菲尼（Ruffini）的结果。他还发展了行列式论。这篇研究报告是体现柯西抽象和严密的数学风格的好例子，还带有一种被人视为故意含糊其辞的倾向。

身体完全康复后，柯西被任命监管巴黎附近的一个工地，但是他在工程方面的兴趣已经减退，他开始寻找能使他的数学天赋得到更好发挥的新工作。当 1813 年拉格朗日去世时，机会来了，然而尽管柯西申

* 原著误为 18 岁。——译者

请了那个空缺出来的职位，但却没有成功。在这一时期，他开始考虑先验地确定一个代数方程的实根个数，这是他一生中反复回归的主题。然而，让他名声鹊起的是他1814年提交给科学院的关于定积分计算的研究。这是他的分析学特别是复分析工作的起点。

第二年科学院有了一个合适的空缺，在拉普拉斯的支持下，柯西参与了角逐。虽然他父亲也施加了相当大的影响，但这个年轻人再一次失望了，不过他被选为声望稍逊的巴黎科学普及学会的会员，这通常被称为科学院的等候室。然而为了谋生，现在已经26岁的柯西，似乎只能返回工程行业。不过，形势随着法国遭遇滑铁卢战败发生了改变，波拿巴再次退位，路易十八复辟。柯西的父亲成功保住了在参议院的高位，参议院现在改称贵族院。

柯西一直是坚定的保皇主义者，王朝复辟为他敞开了机会，那些积极支持革命的科学家被取代。1816年，几经努力之后，他当选为巴黎科学院院士。这一成功让他失去了许多朋友并树敌颇多，因为那些被科学院遣离的科学家中包括卡诺(Carnot)和蒙日，他们都是最富盛名、地位最高的科学家。几乎与此同时，柯西被任命为巴黎综合理工学院的分析学副教授。之后不久，一场源于政治动机的重组又造成了职位空缺，他被提升为分析学和力学的正教授。他至少给某些学生留下了好印象，在他去世后，他以前的一个学生动情地写道："我们都发现柯西精力极其充沛，性格温和且不知疲倦。我们经常听他花费几个小时为我们反复讲述那些我们没有弄明白的课程。他对教学的热爱出自纯粹的热诚，他那友善、质朴、温暖的心一直保持到他生命的尽头。"然而也有人反对他严重拖堂的授课方式，偶尔也会有人对这样一个在大部分信仰自由主义的学生面前毫不掩饰其保皇主义观点的教授露出敌意。

虽然对柯西实现其雄心的方式有争议，但毫无疑问他对这些职位是完全胜任的。他的发现已经让他置身于当时第一流数学家的位置。他认真地履行了他的职责，并且除了巴黎综合理工学院，他还在法兰西

学院和大学任教。他常常在讲课中引入新的思想和更严密的方法,例如连续性的现代定义。有一段时间,数学家越来越关注分析学的概念和证明中严密性的缺失。函数的真正概念就不清晰;运用级数而不考虑收敛与否也引发了悖论和争议;将函数表示为三角级数的争论导致了进一步的混乱;而且,导数与积分的基本概念从未得到恰当的定义。当他课程的第一部分以《代数分析》(*Analyse algébrique*)为名出版时,柯西在引言中写道:

> 至于方法,我力求赋予它们几何学中所要求的一切严密性,以这种方式操作,可以无需依赖基于代数一般性的推理。这些推理尽管得到相当普遍的承认,特别是在从收敛级数过渡到发散级数、从实变量过渡到复变量的过程中,但对我而言,它们只能被视为偶尔适用于猜测事实的引导。它们与数学科学所骄傲宣称的精确性极其不符。甚至应该指出,它们[基于一般性原理的推理]导致了代数公式应用范围的不确定(即无限性),事实上,大多数公式仅在一定条件下对满足这些条件的特定变量才成立。

他所说的"代数一般性",指的是假定实数可以自动过渡到复数、收敛级数可以自动过渡到发散级数等性质。这些评论直接针对老一辈的数学家,如拉普拉斯和泊松,前者的母函数理论基于未必收敛的级数,后者发明了一种直观地从实数轴过渡到复数域来计算定积分的方法。基于极限的概念,柯西给出了级数收敛性和函数连续性的定义,利用同样的想法,他还给出了函数导数的定义。据说柯西在一次学术会议上展示了他的级数收敛理论,会后拉普拉斯赶紧回家,并一直待到把他的《天体力学》中所用的每一个级数都检查了一遍。好在他发现每个级数都是收敛的。

《代数分析》一书基于柯西在巴黎综合理工学院的讲课,这最终形成了他计划中的《分析学教程》(*Cours d'analyse*)的第一部分。虽然名

字如此，但柯西从未打算将它作为一本教科书，而且也从未这样使用过它；不过柯西的著作成为了若尔当（Jordan）经典的《分析学教程》（*Cours d'analyse*）及其他著作的源泉。在其研究论文中，柯西从未达到《代数分析》中设定的严密性标准。虽然他概括地给出了函数连续性的定义，但他从来不认为有必要对其论文中出现的任何特定函数形式地检验其连续性。尽管他强调了收敛的重要性，但他在操作具体的无穷级数时却好像自己从未提出过那样的要求。柯西看起来有点自相矛盾，不过他就是数学中的投机分子，尽管如此，他在宗教和政治事务上是教条的。他之所以能够如此，是因为以他的丰富经验，他对什么是正确的有一种确定的直觉。

柯西在巴黎综合理工学院改革教学大纲的努力并不完全成功；有人反对说他的课程过于野心勃勃，而且比起应用数学，他对纯粹数学投入了太多时间。根据他们的说法，毕竟，巴黎综合理工学院培养的是工程师而不是数学家。那时，科学院对政治和宗教问题持有强硬的观点。柯西与那些跟他一样坚定的保守派、保皇主义者和天主教徒关系很好，但不受自由主义者的欢迎。然而，除此之外，在柯西与泊松之间展开了一场激烈的对抗，虽然后者曾是柯西入选科学院院士的早期努力的支持者。

对柯西而言，波旁王朝复辟时期是他职业生涯最多产的阶段。在这一时期，他的开创性工作主要由三个主题占据。第一是教学，重点在经典力学基础，特别是分析学基础。我们有他授课的详细记录，有时是一份摘要。第二是数学物理，特别是连续介质力学。这包括波的传播理论的主要研究工作，以及弹性力学理论的一本基础专著。最后是关于复分析的开创性工作，特别是复积分和留数计算，这些后来才逐渐赢得广泛认可。所有这些都是在他 28 岁之前完成的。

毫无疑问，在纯粹数学家和应用数学家头脑中，与柯西的名字最紧密相关的发现，是复分析中的基本定理。当然，特殊复函数的性质之前已经有人研究过，如欧拉。在流体力学中，达朗贝尔建立了我们今天所

谓的柯西－黎曼微分方程,并利用复函数求解了这类方程。高斯也在许多方面领先于柯西,但在这一主题上从未发表任何东西。柯西在这一领域的工作散布于多篇论文中。他从未写过一篇全面的研究报告,而且有时好像忘记了他已经做过的事情。然而,正如我们今天所知的,复分析之父毫无疑问是柯西。

到1818年,柯西已经准备好结婚,组建自己的家庭。新娘是阿洛伊斯·德·比尔(Aloise de Bure),来自于一个从事书商、出版商的殷实的旧资产阶级家庭。婚礼在1818年4月4日于时尚的巴黎圣叙尔比斯教堂隆重举行,学界、政界、宗教界名流都来到现场,国王和全体王室成员在他们的婚约上签名,以示祝愿与尊重。这是一场权宜婚姻,看起来他们很匹配,至少一开始是这样。比尔家也是柯西的出版商,他们给这对年轻夫妇提供了巴黎大酒店的一个公寓,并让他们能在邻近阿尔克伊的索镇的住宅里度过夏日。阿洛伊斯生了两个女儿,生于1819年的玛丽·弗朗索瓦丝·艾丽西亚(Marie Françoise Alicia)和生于1823年的玛丽·玛蒂尔德(Marie Mathilde)。

除了他的专业工作,柯西还将大量时间与精力投入到圣童贞女会,这是一个"优秀家庭的年轻天主教徒"与无信仰、反宗教和世俗主义作斗争的组织,柯西是在巴黎综合理工学院做学生时加入的,这一组织在该校尤为活跃。在科学院及别处,他曾经是教权主义的拥护者之一。他痛恨任何形式的自由主义,但是他特别憎恶自由天主教主义。那些来找他谈论数学的人通常会发现,柯西想要的只是让他们皈依到他所在的宗教派别。

当1824年查理十世(Charles X)接替路易十八时,他的政策与柯西的保守主义观点一致。极端保守的国王的目标,是组建一个志趣相投的政府,到1829年8月,他做到了。闲置了7个月的议会被召集起来,并几乎立即被解散了。1830年7月初,新的选举开始了,这让新政府猝不及防。国王拒绝接受选举结果,并以颁布一系列法令应对。新闻自由被禁,国民议会被解散,而新的选举只让特定的选民参加。法令颁

布后,骚乱开始了,巴黎立即陷入到暴动中。与此同时,超负荷的工作,以及对自由主义者重新掌权的失望乃至愤怒,导致柯西的身体每况愈下。当国王让位给他的孙子波尔多公爵(Duke of Bordeaux)并逃往苏格兰时,柯西去了瑞士,起初是请病假,最终演变为长达 8 年的自我放逐。他的行为被误解为是对波旁王朝的忠诚。因为缺勤,他的职务被解除了,仅保留了科学院的院士资格。

这一时期的头三年,柯西主要待在都灵,他被任命为数学物理教授,并迅速学会了意大利语,用这门语言授课。1833 年他搬到布拉格,被流放的国王刚在那里安顿下来,他被任命为小波尔多公爵的家庭教师。柯西努力尝试让他的学生对基础科学感兴趣,但并未受到重视。柯西的家人此前一直留在巴黎,这时也搬到了布拉格。

对柯西来说,查理十世的继任、奥尔良派的路易 - 菲利普太过自由主义了。当他 1848 年下台时,柯西认为是时候从放逐地返回巴黎了,他期待波旁王朝复辟。然而,在一段没有国王的过渡期之后,王权转到了拿破仑三世(Napoleon Ⅲ)手中。柯西得以在大学复职并重新开设课程,直到一份(科学院不需要但大学需要的)效忠宣誓导致他放弃了教职。他的支持者想让他在经度局和法兰西学院复职的努力都以失败告终,原因将在下一章解释。

与之前相比,柯西在自我放逐的岁月里没有那么多产。法国新一代数学家中的后起之秀没机会听柯西的课,这是他们的巨大损失。尽管如此,柯西对年轻一代数学家依然有很重要的影响,而且他继续发表研究成果。在之后的这些年中,他将许多时间投入到索镇的慈善事业,他捐献了自己的全部薪水。常常带有政治寓意的学术争论也占据了他大量时间。柯西太过活跃于在院士之间耍阴谋诡计,这也持续消耗着他的精力。他还卷入了一些关于发现的优先权的徒劳无功的争论。他那一直都不算强壮的身体,此时开始令人担忧。遵循医生的建议,柯西在 1857 年 5 月 12 日离开巴黎前往索镇,打算在那里消夏,然而他的健康突然恶化,他在 11 天后去世,享年 67 岁。

柯西的大量笔记和其他手稿材料，包括许多用法语和拉丁语写成的诗歌，在第二次世界大战前被肆意毁坏了。他一生中发表了大量数学著作，有研究专著，有教科书，也有稳定产出的研究论文，还有经过他指导的一些尚未发表的作品也在其身后补充到他的多卷本全集中。不幸的是，他写的许多东西都是杂乱无章的。陈述了一个结果，然后否定它，接着只是再一次陈述它；对某种方法严厉批评，接着却在下一个时机成功地应用它；各种记号被无缘无故地变来变去。他恰好是高斯的对立面，高斯发表的东西远比他做出的成果少。高斯真正发表的东西非常深刻，只有极少人能理解。相形之下，柯西的著作看起来就肤浅了，但它们立即会激发进一步的研究。有时柯西甚至会忘记自己曾经写过的东西，从而会将同样的东西发表两次。

如果他偶然有了一个新想法，他会迫不及待地想发表出来。《法国科学院通报》(*Comptes Rendus*)周刊直到 1835 年才建立。柯西在 1825 年创办了他自己的月刊《数学练习》(*Exercices de mathématiques*)。其页面被柯西自己的文章以最不可能的次序用最不可能选择的主题全部填满。在他离开巴黎之前，《数学练习》出版了 5 卷。在都灵，他恢复了这一工作，甚至在当地报纸上发表文章，后来又延续到了布拉格，当他回到巴黎以后，成功将《数学练习》扩充到 10 卷。他也在其他刊物上发表作品，他至少有 18 篇独立的研究报告没有出现在任何期刊或文集中，他还写了许多教科书。有时候即便以他本人的标准来看，他的活力也是爆炸性的。在 1848 年 8 月科学院的 3 次会议上，他提交了不少于 5 篇笔记和 5 篇研究报告。在不久之后的 9 次会议上，他又提交了 19 篇笔记和 10 篇研究报告。科学院对此洪水猛兽不堪重负，颁布了一条至今仍然有效的规定：凡发表在《法国科学院通报》上的论文，篇幅不得超过 4 页。这一时期听过他的本科课程的人会有一种奇特的经历。有时他会花费整整一个小时用他刚刚发明的方法来计算 17 的平方根的前 10 位小数，而这一方法是所有学生都已经熟知的。

在他为科学院的稳定供稿中，柯西偶尔会突然转向或回到另一个

主题，他这么做的原因并不能立即看出来。不过，过了一阵，科学院会收到他提交的对某篇交给他评审的论文的评审报告。在这期间，他会重新验证这位作者的结果，拓宽、深化并推广它们。而在他的评审报告中，他绝不会漏掉与所评审论文主题相关的他自己之前所做的研究。

自私、自以为是、道貌岸然，难怪柯西不招人喜欢。一个与他同时代的人对他的评价颇为典型："他的严厉死板样子，以及对年轻学者缺乏宽容，使他成为了学者中最不讨人喜欢的人，也肯定是最少有人喜欢的人。"如果没有那些狭隘的、近乎狂热的政治观点，也许他可以取得更大的成就，事实上他浪费了太多的天分，而且偶尔会滥用当政者给予他的权力。柯西似乎常常喜欢将自己置于对别人的工作品头论足的位置。当他变得日益资深和有影响力时，前来找他获取鼓励和支持的有抱负的青年常常会失望。然而，如果你认为柯西从未认识到其他人研究中的优点的话，那就大错特错了。当他评审一篇论文时，他会如实地报告其优点，即便那个工作与他本人的工作有重叠。在与他同时代的所有数学家中，柯西征引其他人的工作是最谨慎的，而且如果他发现自己错了，他会坦率地承认。他也许是自私的，但他从未让自己被私心完全掌控。

第三章

从阿贝尔到格拉斯曼

我们接下来要讲述的6位数学名家生于1802—1809年的8年间。其中3位来自德国,另外3位分别来自法国、挪威和爱尔兰。

阿贝尔(1802—1829)

尼尔斯·亨里克·阿贝尔(Niels Henrik Abel),斯堪的纳维亚半岛上出现的最为才华横溢的数学家之一,经常为人所述及。构成一出闹剧的所有元素似乎都出现在他的生命中:穷困潦倒的天才因肺结核而于青梅爱侣的臂弯中离世,此时自私的院士们* 正坐拥他的杰作,而他最终获得渴望已久职位的消息却来得太迟。真实情节足够悲惨。

芬岛是临近挪威斯塔万格市的一座岛屿。芬岛上的路德教会牧师,索伦·格奥尔格·阿贝尔(Soren Georg Abel),曾受教于哥本哈根大学,是一位富有天资而雄心勃勃的神学家。他的妻子,安妮·玛丽[Anne Marie,娘家姓西蒙森(Simonson)],则是一名富商和船主的女

* 此处当指1826年审阅阿贝尔论文的巴黎科学院院士。——译者



儿。他们的孩子尼尔斯生于1802年8月5日，是家中六个儿子、一个女儿中的老二。拿破仑战争以后，他的父亲作为一名极为知名的民族主义者，成为挪威议会特别会议的一员，这次会议于1814年召集，以重新制定宪法，反映瑞典取代丹麦同挪威结盟的事实。继1816年竞选失败后，阿贝尔牧师于1818年再次成功入选议会，但不幸的是，他的政治生涯以彻底失败告终，他也沦为酒鬼。

他的儿子尼尔斯13岁起前往克里斯蒂安尼亚(即今日奥斯陆)的教堂学校就读。该校声誉良好，但其中一些最优秀的教师恰于此前流失，去往新建的皇家弗雷德里克大学*，这位男孩最初的才智和兴趣因而很快消减。不过幸运的是，他受到了霍尔姆伯(Bernt Michael Holmboe)的影响，这位干练的新任数学教师发现了阿贝尔的稀世天分。在他的引导下，年轻的阿贝尔开始研习欧拉、拉格朗日和拉普拉斯的著作。在校的最后一年，尚不满20岁的阿贝尔向解一般五次方程这一老问题发起了冲击。和前人一样，他曾认为他解决了该问题，随后却发现自己弄错了。于是他将注意力转向椭圆积分，正如我们在勒让德的传略中看到的那样，他也意识到椭圆积分的反函数亦即椭圆函数可能存在一些有趣的性质。在两年内，他就发展出了一套理论。

阿贝尔中等身高，体型偏瘦。据说，他那蓝色的眼睛温暖而闪亮。他酷爱戏剧，但对音乐没有兴趣。时而高亢、时而低沉的情绪起伏表明，他可能有躁狂抑郁症倾向。1820年，他父亲的亡故为他母亲留下了沉重的债务。当发现对此难于应付后，她也开始嗜酒。阿贝尔将科

* 该校创建于1813年，是奥斯陆大学的前身。——译者

学家、探险家汉斯廷*的夫人看作第二位母亲，在他那些艰难岁月里，汉斯廷夫人对其实际生活帮助甚多。尽管穷困，他还是成功进入了大学**。在教堂学校他曾获得奖学金支持，而大学没有类似资助，但还是分配给他一间免费宿舍。鉴于他生活窘迫，一些教授也在他求学期间给予了他财力上的支持。虽然没有数学方面的高级课程，他却靠自己的努力通览了最重要的文献。这个阶段他写了两篇研究论文，其中意义更为重大的便是关于积分方程的开创性工作。

和挪威不同，此时丹麦有一所数学不错的学校。于是，在1823年，21岁的阿贝尔在一位丹麦大学教授的资助下，前往哥本哈根拜会丹麦的数学家们。在丹麦期间，他邂逅了一位名叫克里斯蒂娜·肯普(Christine Kemp)的年轻女子，她的家人和朋友都称她克莱利(Crelly)。不久他们即订婚，克莱利迁至挪威与未婚夫毗居。据说，她不算十分漂亮，但品性极佳。

一回到克里斯蒂安尼亚，阿贝尔就重拾五次方程问题。这一次他正确地证明，在一般形式下此类方程没有根式解，这一成果后来被伽罗瓦拓展到更高次的方程。他详细写出证明，将摘要付印并寄送高斯等人，但几无回音。克里斯蒂安尼亚大学的理事会认识到阿贝尔的异常才能，决定必须给予他留学巴黎的机会，必要的资金由国家提供。1825年秋，他和大学里其他一些青年科学家一同启程，不过其旅程随后变为对法国、德国及其他国家大学的游学。按照原计划，阿贝尔应于前往巴黎的路上在格丁根拜访高斯，但是当他的同伴们后来准备去柏林时，阿

---

* 汉斯廷(Christopher Hansteen，1784—1873)，挪威地球物理学家和天文学家，主要致力于地磁研究。他对阿贝尔的学术成长有很大帮助。霍尔姆伯教授阿贝尔之前，即在皇家弗雷德里克大学担任汉斯廷的助教，而阿贝尔初次尝试解一般五次方程问题的论文，即由汉斯廷帮助转寄丹麦数学家德根(Carl Ferdinand Degen，1766—1825)审查，正是后者建议阿贝尔研究椭圆函数。阿贝尔的首篇学术论文，也发表于由汉斯廷等人创立的挪威首份科学期刊《自然科学》(*Magazin for Naturvidenskaberne*)的1823年创刊号上。——译者

** 即皇家弗雷德里克大学。——译者

贝尔也决定随之同行。阿贝尔在柏林花费过多,此举从经济上说并不明智,但确大有裨益:阿贝尔由此结识了他后来的赞助人,杰出的克雷尔。

克雷尔是职业土木工程师,主持过诸如普鲁士铁路等大型公共工程。1780 年出生的他,很早就对数学产生了兴趣,在应用数学和中学数学方面出版了一系列著作。1826 年阿贝尔来访之际,他刚刚创办《纯粹与应用数学杂志》,即一般为人所知的“克雷尔杂志”。它迅速成为第一流的德语数学期刊,并帮助柏林成为一个重要的数学中心。尽管原本想让它兼顾应用数学,但重心很快便落在纯粹数学方面。克雷尔认为,“纯粹数学应当在不考虑其应用且不受后者干扰的情况下,首先予以说明。它应当完全从其自身出发,并且为其自身发展,因为只有在这种方式下它才能在各个方向自由地行进和演化。在教学中,数学的各种应用,乃是人们特意追求的结果。对于受训于该科学本身并能领受其精神的人而言,付诸应用易如反掌。”

在他期刊创刊号的卷首语中,克雷尔陈述了他的目标:这里不仅会刊登最新的重要论文,也会选择一批已经以其他语言发表过的文章,以德语的形式再版。克雷尔自己将勒让德的几何学课本和拉格朗日的一些法语著作翻译为德语。不管怎样,该杂志很快就走向国际化,这多亏了克雷尔在巴黎及其他地方的广泛人脉。他很擅长发现年轻有为的数学家并鼓励他们。阿贝尔、狄利克雷、艾森斯坦、格拉斯曼(Grassmann)、黑塞(Hesse)、雅可比、库默尔、罗巴切夫斯基(Lobachevski)、默比乌斯、普吕克、冯·施陶特、施泰纳(Steiner)和魏尔斯特拉斯(Weierstrass)的早期著作都曾发表在克雷尔的杂志上。恐怕它被来自柯西的那些没有找到的投稿给淹没了。

克雷尔为人友好,善于交际。1826 年 1 月阿贝尔与他初次会面后,致信以前的老师霍尔姆伯说:“他如此优秀,你无法想象有人能做到这样;他行事体贴周到,却又不似多数人那样过分客套,且又如此诚实。我与他的关系良好,就像我与你以及其他好友一样。”在克雷尔的

鼓励下,阿贝尔定期在“克雷尔杂志”上发表文章;仅第一期就登载了他的七篇论文,而之后几期则更多,其中大部分都很重要。

阿贝尔远在柏林时,他母校的一个初级讲师的职位意外空出,不过在阿贝尔得知这个消息之前,他的导师霍尔姆伯就填补了这个空位。人们认为阿贝尔过于年轻,经验不足。他深感苦闷,因为很难说这样的机会什么时候还会再度出现。他打算结婚,可是如果拿不到“铁饭碗”,这婚也不好结。

1826 年春季,阿贝尔终于下决心前往他最初的目的地——巴黎。克雷尔答应和他同去,他们打算顺路经过格丁根时登门拜访高斯,正如原来计划的那样。不幸的是,生意上的压力使得克雷尔无法抽身离开柏林。最终,阿贝尔决定在去巴黎之前先和朋友们出去游历一番,这对于他的学术并无多大帮助。他们去了莱比锡、弗赖贝格、德累斯顿、布拉格、维也纳、格拉茨、的里雅斯特、威尼斯、维罗纳、因斯布鲁克、苏黎世和巴塞尔,一路挥霍无度。阿贝尔抵达巴黎已经是 7 月份,身上的钱也花的差不多了。暑假已经开始,所以他希望见到的那些科学家全都出城了。等到他们回来,阿贝尔发现他们大多数冷漠高傲,难以接近,而他们则觉得阿贝尔那相当拙劣的法语难以理解。勒让德的主要专长是椭圆积分,他只是礼数周全地接待了阿贝尔,但随后意识到,他本可以从阿贝尔身上学到不少东西。柯西以其一贯的无礼态度接待了他。阿贝尔如此置评:

勒让德极其彬彬有礼,可惜泥古不化。柯西是个疯子,你和他怎么都谈不下去,虽然他是现下知道该怎么探讨数学的数学家。他笃信天主教又固执己见。这种特质在一个数学家身上真是非常奇怪……泊松身材短小,有个非常可爱的小肚腩。他举止优雅,傅里叶也差不多。拉克鲁瓦秃得厉害,而且非常老。周一阿谢特要把我引荐给这些先生当中的几位。比起法国人我更喜欢德国人。法国人对待外国人有一种罕见的冷淡,你很难和他们深交。老实说我也不指望能有这些交情。每

个人都只为自己工作，不顾及他人。个个都好为人师不愿学习。最绝对的自负情绪到处蔓延。法国人从外国人身上寻找的唯一东西就是实际应用……只有他们自己才可以创造理论……你可以想象在这儿要引人注目有多难，尤其是对一个新手来说。

为向巴黎科学院推荐自己，阿贝尔撰写了一篇关于超越函数的研究报告，他认为这是他的杰作。阿贝尔写信给一位朋友说，“我完成了一篇有关几类函数的重要论文，打算提交给科学院。计划会在周一进行。我拿给柯西看过，但是他连正眼都没瞧一下。绝对不是吹嘘，我敢说这篇文章写的很好，我很想知道科学院会给出什么评价。”1826 年 10 月底，该论文被提交到科学院。柯西和勒让德被任命为审稿人，柯西主审。阿贝尔满怀希望地等待报告，结果却竹篮打水一场空。之后他写道：“我每天都在等待他们对我提交给科学院的论文的裁决。但是那些人拖拖拉拉，一直没审完。勒让德和柯西是审稿人，柯西负责报告，勒让德只是附和。”

彼时阿贝尔已经被引荐给了很多一流法国科学家。老一辈的数学家里，只有勒让德让他觉得是受到了礼遇。不过比他稍年轻些的狄利克雷，还有比他大不了多少的拉斯帕伊（Raspail），把阿贝尔带进了他们的朋友圈。圣诞节之后，阿贝尔为他几无建树的巴黎之行感到沮丧，回到了柏林。一直热心帮助他的克雷尔曾做过努力，想要吸引影响力颇大的冯·洪堡（von Humboldt）兄弟对这位挪威年轻人的关注，先是身在巴黎的亚历山大·冯·洪堡（Alexander von Humboldt），如今是身在柏林的哥哥威廉·冯·洪堡（Wilhelm von Humboldt），但是这些努力均一无所获。

巴黎综合理工学院当时汇聚了诸多德国知识分子，这给克雷尔留下了深刻印象，他想要在柏林组建一所工业大学，并打算让阿贝尔担任最早的教职团队中的一员。与此同时，借钱度日的阿贝尔正在就他椭圆函数方面的主要工作为“克雷尔杂志”撰文，文章的题目就叫做《椭

圆函数研究》(Recherches sur les fonctions elliptiques)。他写信给勒让德的时候,后者的"椭圆函数"才刚刚有了点苗头。勒让德给了他一封热情洋溢的回信,但只字未提他 10 月份提交给巴黎科学院的研究报告。

不久阿贝尔就病了,这显然是夺去他生命的肺结核的首个征兆。当他完成了两年的海外学习,于 1827 年 5 月回到克里斯蒂安尼亚后,他发现等待他的不是有一份合适工作的前景,而是一堆债务。他靠做家教勉强维生。那时他的理论已经在法国和德国引起关注,巴黎科学院写信给瑞典和挪威的国王,敦促斯德哥尔摩科学院认识到阿贝尔的卓越才能。阿贝尔对此浑然不知,但就算这封信没有得到回应,至少他成了特隆赫姆挪威皇家科学学会的一员。1828 年早些时候,他得到了克里斯蒂安尼亚大学的一个临时职位,但他惊异地发现柏林大学的一名比他还要年轻的编外讲师雅可比,宣布了关于椭圆函数的新研究结果。阿贝尔看出这些结果是自己理论的推论,虽然雅可比没有给出任何证明和致谢。

尽管健康每况愈下,阿贝尔仍坚持撰写他的理论,希望能继续领先于雅可比。他开始担心 1826 年递交给科学院的研究报告已经遗失了,于是在 1829 年 1 月上旬,他给克雷尔寄去了一份摘要,以供发表在"克雷尔杂志"上。不久之后,他经历了一次大出血,肺结核被确诊了。1829 年 4 月 6 日,年仅 26 岁的他走到了生命的尽头。两天后克雷尔的信到了,柏林的教育部计划在柏林新建的工业大学给阿贝尔提供一个教职,在那儿他本可以和狄利克雷、雅可比、施泰纳成为同事。毫无疑问,这封信来得太迟了,成立新机构的计划一直被拖延到数年以后。柯西仍没有就他的研究报告做报告,尽管勒让德已提出了数次抗议,不过这时他应该知道研究报告的精髓将要刊登在"克雷尔杂志"上了。研究报告的全文发表一直拖到了 1841 年。

克雷尔在他的杂志上写了一篇很长的悼词,他是这么说的:

阿贝尔的所有作品,都带有独创的印记和思想的力量,它们不同寻常,有时又令人惊异,即使你不考虑作者何等年轻,也是如此。有人也许会说,他能够洞穿所有的障碍直达问题最根本,力量不可阻挡;他以超人之能量攻克问题;他高屋建瓴地看待问题,能够超越现状高高翱翔,所有的困难都在他天才的胜利猛攻下消隐无踪……然而,对阿贝尔的尊敬和对他逝去的无限惋惜,并不仅仅是因为他的杰出才能。他以洁白无瑕的高贵品性,以及十分罕见的谦逊超群出众,正是这些,让我们珍视他本人,如同珍视他的天才一样。

阿贝尔也许无论如何都注定早逝,而且他似乎颇不明智,且极为不幸。挪威当局因未能给予他更多帮助而受人责备,柯西也因对其研究报告的处置同受指责。最终,那份手稿在佛罗伦萨被发现,它显然是被利布里从科学院拿走了,这个无赖在热尔曼的传略中就已出现。阿贝尔是挪威的民族英雄,他的百年诞辰被广为庆祝,各式各样的纪念碑也为之树立。由维格兰(Vigeland)设计的那尊触动心灵的纪念像,矗立在挪威王宫的"阿贝尔园"中,它是现代奥斯陆的主要名胜之一。阿贝尔是名天才,这无可置疑。而就数学的发展而言,他的英年早逝乃是一桩深为可悲的事。

雅可比(1804—1851)

我们现在将注意力转向阿贝尔的年轻竞争者。雅可比(Carl Gustav Jacob Jacobi)是我们要讨论的若干犹太数学名家中的第一位。

虽然他的名字同许多数学上的发现相联系,这反映了他广泛的兴趣,但他最知名的还是他的椭圆函数论。不太出名,但在一些方面同等重要的,是他的创新教学法,尤其是他在纯粹数学领域创立的研究讨论会。实际上在他40岁以前,欠佳的健康状况就过早地终结了他的职业生涯。



卡尔·古斯塔夫·雅各布·雅可比（这是他的全名）于1804年12月10日出生于波茨坦，柏林科学院所在地。他的父亲西蒙（Simon）是一位银行家；关于他母亲的记载似乎不多，只知道她娘家姓莱曼（Lehmann）。这一家颇有教养、家境殷实。卡尔有一个哥哥莫里茨（Moritz），还有一个弟弟爱德华（Eduard），和一个妹妹特蕾泽（Therese）。之后，莫里茨成了圣彼得堡一位知名的物理学家，而爱德华则继承了西蒙·雅可比的家族生意。直到12岁，我们未来的数学家还在他一个舅舅的教导下学习古典文学和数学。他很快就被认为是一名神童。1816年他进入波茨坦文理中学，几乎立即就升到了班级最高成绩，4年后的1821年，他以古典文学、历史和数学最高分的成绩毕业，并被柏林大学录取。

在那儿的头两年，雅可比把时间分摊在古典文学、哲学和数学上。之后他仿照高斯的例子，也学习语言学。由于这个时期德国大学的数学教学还处于基础阶段，雅可比课后继续自学欧拉、勒让德和其他人的数学经典文献，在他19岁取得了职业教师资格之后，在柏林享有声望的约阿希姆斯塔尔文理中学提供给他一个教职。他没有接受这一职位，而是开始争取大学教师的资格。

一些关于德国及其他几个国家大学运行体制的事情需要在此说明。学生面临的只有一次考试，要么是为了进入某个职业领域的必备证书，要么是为了博士学位。这个体制有一点好处，就是学生们可以在大学间轮转，听当时的领军教授们讲课。要获得哲学博士学位，学生需要写一篇论文，同时满足其他要求。但是和今天的硕士论文一样，并不需要有原创性研究。

职业阶梯的晋升过去是、现在仍然是复杂漫长的过程。只有那些从大学而不是技术学校毕业的人才可以获得教职，之后成为大学教授。

拿到博士学位后的第一步,是成为一名编外讲师,或者认证讲师:没有固定薪金,只有在大学的主持下讲课(讲师资格)及按标准收取听课学生费用的权利。追求教职的人为了要达到这一阶段,需要展示另一篇论文,即教师资格论文,但这次需要包含原创性研究,并要做大学教师资格答辩,即从提供给候选人的短列表中选择一个题目试讲。如果他能经受得起,也许会在编外讲师这个相对较低的位置上无限期地待下去,而下一个要追求的职位就是副教授。最后一步就是晋升正教授了,薪水和地位都将大大提高。

我们继续讲述雅可比的生平故事,1823 年他就部分分式写了一篇博士论文,次年完成了大学教师资格答辩,同时转信基督教;从那时起,他的犹太血统看起来不再是个障碍了。20 岁就已经是编外讲师的雅可比,教授了他在大学的第一堂课,关于三维空间曲线与曲面的解析理论。显然,他讲课的简明与生动给听众留下了深刻印象。然而看起来他没有多大机会能在柏林大学获得高级职位,所以 1826 年他搬去了普鲁士东部城市柯尼斯堡的柯尼斯堡大学,那儿的前景看起来要更好些。一年之内他就成了这所数学传统深厚的大学的副教授,五年之后成了正教授,与在柏林大学不同的是,他有了一些很有能力的同事。雅可比在那儿呆了 18 年,这是他职业生涯中最好的一段时期。

据克莱因说,雅可比在被接纳为柯尼斯堡大学教工一员的过程中遇到了困难,因为他曾对那里的每个成员出言不逊。尽管有说话直率、嘲讽挖苦的名声,他证明了自己是一名非凡的教师。他让自己表现得所知甚少,并渴望新知。他将新的数学思想引入学生课业,以让学生可以跟上他的研究课程。他的热情如此高涨,以至于他常常提供给学生他无暇发表的结果。在人文科学中之前已经有了研究讨论会,而雅可比是将它引入纯粹数学领域的第一人。

还在学生年代,雅可比就开始尝试和其他数学家通信,包括高斯和勒让德。他与后者的通信刊载在他的文集中,它们相当有趣,提供了当时研究进展的消息是如何传播的例子。一开始他们的通信涉及勒让德

关于阿贝尔积分的研究，雅可比作了一些补充。勒让德对此印象深刻，也正是基于他的鼓励，雅可比才能进步神速。我们知道，勒让德对高斯特别有敌意。1828 年，克雷尔向高斯讨要一篇椭圆函数的论文之后，高斯回复称雅可比对这一课题已有涉猎，“且富有远见，鞭辟入里，形式优美，以至于我相信我可以安心发表自己的研究了。”勒让德得知此事后，满怀义愤给雅可比写信：“高斯怎么敢告诉你他已经知道你大部分的（椭圆函数）理论，而且早在 1808 年他就已经发现了它们？这种极度的厚颜无耻发生在一个本身足够优秀、无需盗用他人发现的人身上是令人难以置信的。”

1829 年夏天，25 岁的雅可比前往巴黎，顺路拜访了高斯。此行部分是为了拜访勒让德，但也是为了结识傅里叶、泊松和其他法国领军数学家。之后雅可比评论道：“傅里叶责备了我们，我和阿贝尔，因为我们没有选择学习热传导。这是真的，傅里叶认为数学的主要宗旨是公共应用和对自然现象的解释；但是他这样的哲学家本应该知道科学的唯一宗旨是人类精神的荣誉，从这一观点来看，数论的问题同太阳系的问题一样有价值。”雅可比另一位在巴黎的通信对象是埃尔米特（Charles Hermite），我们后面会提到他。

1831 年雅可比娶了玛丽·施温克（Marie Schwink），一位曾经富贵、却在投机投资中倾家荡产的商人的女儿。次年，雅可比的亲生父亲去世了。尽管他曾经衣食无忧，但此时严重的财政问题显现了，本就劳累过度的雅可比在处理这些问题的压力下一度虚脱。1842 年，他作为代表团一员出席英国科学促进协会的年会，归途中在巴黎科学院做了报告。有一幅肖像画描绘的是他这一时期的侧影，当时他 35 岁左右。

不久之后雅可比得了糖尿病，病得很重，根据医嘱，他请了一年病假。狄利克雷在亚历山大·冯·洪堡的帮助下做了安排，为他的朋友兼同事领取到一笔来自普鲁士政府的津贴，让他得以在意大利度过一段时间。在包括狄利克雷在内的优秀数学家云集的罗马度过一段漫长、舒适的康复期之后，雅可比于 1844 年回到德国。担心柯尼斯堡更

加严酷的气候会对他的健康不利,他决定搬回柏林。他入选了柏林科学院,所以获得了在大学讲课的资格。尽管没有义务这样做,他还是会偶尔上课,因为他的健康状况不佳。在他主讲的一门分析力学的课上,他就拉格朗日的《分析力学》警告学生:“事实上这是一本你要非常小心的书,因为它的一些内容有着超自然的性质,而不是建立在严格证明的基础上。如果你不想被骗或者半懂不懂地相信某些会被证伪的东西,你就一定要审慎对待它。”

虽然雅可比是一个爱国者,但在1848年的一次政治会议上,他的一些轻率言论导致他被当做政府的不信任对象对待。结果就是他的政府津贴被停了一段时间,他试图同大学加强联系的努力也被教育部阻碍了。财政问题意味着这家人要放弃他们在首都建好的房子,他的妻子和孩子搬至一个叫做哥达的小镇,那里的生活成本低些,他则住在城市小旅馆的一个房间里。1849年底,他得到一个维也纳大学的教授职位。就在他接受这一职位邀请后,教育部才意识到普鲁士将要失去它最重要的科学家之一,他被劝说留下。然而,1851年初他去看望家人时染上了流感,之后又患了天花,这导致他于1851年2月18日撒手人寰,年仅46岁。他留下了妻子、五个儿子和三个女儿。

狄利克雷在柏林科学院的一次纪念讲座上,将雅可比描述为拉格朗日以来科学院最伟大的成员。尽管他在广泛的学科领域都做出了贡献,如行列式理论、数论、动力学中出现的偏微分方程和三体问题,他主要被人铭记的还是他在椭圆函数上所做的工作。如我们已经看到的,他在这方面同阿贝尔形成竞争,但是与阿贝尔不同的是,他把θ函数当做基本函数。虽然他确实是利用了阿贝尔的思想,且在阿贝尔在世时未作合适的声明,但之后他忘我地推动人们对这一理论的了解。1829年,他发表了一篇研究报告《椭圆函数基本新理论》(Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum),系统地展示了阿贝尔和他关于椭圆函数的理论。关于椭圆函数理论的历史有颇多记载。结论似乎是阿贝尔先于雅可比数年,但是高斯在更早前就发现了基本的理论。

克莱因在他对19世纪数学发展的记述中,对于雅可比的评价也很有趣:

相比于阿贝尔,他不够深入和创新,但是更为多面。雅可比不仅有获取纯粹科学知识的冲动,还有传授知识的渴望。这种想要激励别人的动力一方面体现在他才华横溢的教学才能上,另一方面也体现在他维护人格的坚定决心上,甚至到了不顾他人的程度。他聪明头脑的敏锐和全能,同他恶名在外、令人畏惧的讥讽之辞一起,为他连续不停的战斗提供了最有效的武器,尽管他常常被引诱着逞性地使用了它们。

雅可比可能会被拿来与欧拉作比较。当然欧拉涉足更广,但是他们都是多产的作者和不知疲倦的计算者。丝毫不令人惊讶的是,雅可比对他这位伟大前辈的著作有着特殊的兴趣,并拟定了详细的计划,要将汗牛充栋的材料(其中一些还未出版)整理成一部全集。不幸的是,事实证明当时只可能小规模地做这件事,而1911年就开始的欧拉论文集的出版,直到今日仍未完工。

狄利克雷(1805—1859)

狄利克雷(Peter Gustav Lejeune Dirichlet)据说用最少量的盲算和最顶级的直觉实践了攻克问题的艺术。正是在他的领导下,柏林大学开始树立起数学方面的强大声望。因为在事业的起步阶段他曾在巴黎供职,他为法德两国数学家建立了重要的联系。在很多方面他同他终生的朋友雅可比形成直接对比。

迪伦是一个靠近亚琛的镇子,位于莱茵兰。虽然现在它是德国领土,但在19世纪早期它处于法兰西帝国境内。彼得·古斯塔夫·勒热纳·狄利克雷,当地邮政局长的儿子,1805年2月13日出生在那里。他总把自己看做是德国人而非法国人,几乎不使用他前面的两个名字。



12 岁时他进入波恩文理中学，据说他在那儿曾经是个异常专心和规矩的学生，对历史和数学尤其感兴趣。

在波恩呆了两年以后，狄利克雷的父母决定把他转学到科隆的耶稣会学校。他们打算让他学习法律，但是数学已经在他所选择的领域里了。他在科隆的老师中有物理学家欧姆(Ohm)，给他打下了全面的理论物理学基础。正如他清醒意识到的那样，当时德国大学纯粹数学的教学水准非常低下。德国唯一杰出的数学家就是令人敬畏的高斯。然而在巴黎，他所知道的就有傅里叶、拉普拉斯、勒让德、泊松和其他一些人。16 岁早早通过了高中结业考试以后，这个年轻人决定去巴黎求学。

1822 年 5 月到达巴黎后，狄利克雷开始在巴黎大学和法兰西学院听课。之后的夏天，他很幸运地得到一个待遇优厚且合意的职位，给费伊(Maximilien Fay)将军的孩子们做家庭教师。这位将军是拿破仑战争中的英雄，之后成了众议院中自由派反对党的领袖。狄利克雷被当做家庭一员，通过费伊将军见到了很多当时法国知识分子中最为重要杰出的人士，其中包括傅里叶，他的思想对狄利克雷之后在三角级数和数学物理方面的工作产生了重大影响。

然而，狄利克雷最初对数学的兴趣是在数论方面。早先对高斯《算术研究》的研习引发了他的兴趣，这本书出版的 20 多年后，数学家们还是没能完全理解它。1825 年 6 月，他向巴黎科学院提交了他的第一篇研究论文，是关于丢番图方程的。1825 年费伊将军去世后，狄利克雷决定去德国发展，这一计划得到他的科学家同伴亚历山大 · 冯 · 洪堡的大力支持。他获得了在布雷斯劳大学担任编外讲师的资格；由于他没有必须的博士学位，由科隆大学颁给了他荣誉学位。他的大学教师资格论文研究的是素因子属于特殊算术级数的多项式。他这段时

期的第二篇论文则是在高斯发表双二次互反律的启发下完成的。

狄利克雷被任命为布雷斯劳大学的副教授,但是很快写信给他母亲,“在科学方面,这里能提供的东西很少。我会动用我所有可以动用的力量调到柏林大学去。”他寻求高斯的帮助,高斯给他写信道:“你对那部分数学(指数论)的迷恋让我很高兴,数论一直是我最喜欢的研究领域,而我对它的后续研究却很少。我真挚地希望你能够处在一个可以尽可能自己掌控时间、选择研究工作的环境下。我的《算术研究》一面世,我自己就被其他的事情羁绊住了,之后是被客观环境在相当程度上阻碍,使得我不能追求我的爱好,而这原本是我所希望的。”

1828 年,狄利克雷计划调往柏林大学的努力成功了,这多亏亚历山大·冯·洪堡的支持,他想要加强那里的自然科学。狄利克雷被委任了一个帝国战争学院的教职,且在攀登大学学术阶梯过程中保持了这一职位。在那儿他又从一个小小的编外讲师起步,但是不到 3 年时间他成了副教授,1839 年成了正教授。1831 年,他被选入柏林科学院,同年他娶了丽贝卡·门德尔松-巴托尔迪(Rebecca Mendelssohn-Bartholdy),她是哲学家摩西·门德尔松(Moses Mendelssohn)的孙女、作曲家费利克斯·门德尔松(Felix Mendelssohn)的姐姐。

1800 年前的德国,学完法律、神学或医药专业的大学生要继续学习人文科学的课程。那些第一流的数学家,像我们已经看到的那样,都不在大学里,而是就职于柏林科学院。然而,随着普鲁士在拿破仑战争中丢掉大片领土,国王要求他的国家用智力来挽回战争中丢掉的东西。在之后大刀阔斧的改革运动中,柏林大学 1810 年以普鲁士“中央大学”的名义开门办学,威廉·冯·洪堡,亚历山大的长兄,是这次运动背后的推动力量。他引进激进的思想,认为教授应该教任何他们想教的,学生应该学任何他们偏爱的课程。虽然像同时期的其他德国大学一样,柏林大学依然被要求培养学生为职业和公共服务做准备,却也同样强调原创性的学术与研究工作。而且,科学家们所在的哲学系,被给予同其他系一样的地位。要在柏林大学做正教授,至少一个博士头衔

是必须的,对科学家来说就是哲学博士学位。这些改革举措也传播到德国其他地方正在建设或重建的大学。与此同时,学校内不再过分强调学习古典文学,而在新建的中学中,被看做是科学基础的数学,成了课程的主体。

在柏林,科学院强大的数学传统反映在大学、军事学院和其他机构的课程设置重点上。狄利克雷来到大学的时候只有18岁。从巴黎来的他,发现这里急需通过改进考试、引进新教学法、努力跟上研究前沿来更新数学学习内容。他和其他人一道努力,包括雅可比、约阿希姆斯塔尔(Joachimsthal)、库默尔、施泰纳和魏尔斯特拉斯。与此同时,克雷尔刚刚创办了他的"克雷尔杂志",有才能的年轻数学家可以在上面发表他们的研究成果。不久,柏林就与巴黎匹敌,成为数学学科的一个中心。

在柏林大学任教的27年里,狄利克雷通过他的讲课、他的学生,以及那一时期他写作和发表的一系列重要科学论文,对德国数学的发展产生了重要影响。他是一名了不起的老师,总能非常清晰地表达自己。如我们所知,狄利克雷和雅可比是密友,他们对各自的工作也互相施加影响,尤其是在数论方面。1843年,雅可比在罗马渐渐康复,狄利克雷过来与他作伴,之后一起去了佛罗伦萨,18个月以后回到德国。

狄利克雷第一篇关于费马方程的论文是受了勒让德的启发。随后那些在柏林早期岁月的数论论文显然是受到了高斯的影响,尤其是他的《算术研究》。当中某些论文恰好涵盖了对高斯的证明和描述的改良,但是渐渐地,狄利克雷开始对理论进行更深入的钻研。后来库默尔评论道:

这本书,相比于他(狄利克雷)在巴黎学习的其他东西,对他的整个数学教育和发展产生了重要得多的影响。他并不是只读了一遍或者几遍,而是穷一生之力,反复研读。他从未停止一遍遍学习它所包含的大量深邃数学思想。这就是为什么它从没被放在书架上,而是放在他

的工作桌上。你完全可以想象,他一定是花了很大力气来分析这部鸿篇巨著,考虑到它出现后的20多年时间里没有哪位当时还在世的人研究过它的全貌并完全理解了它……而狄利克雷是第一个不仅完整研究了这部作品,而且让其他人也能够理解它的人。为了做到这一点,他将那些背后隐藏了最深邃思想的严密方法变得流畅、清晰,并将许多要点替换成了更简单的一般性的东西,但丝毫没有影响证明的完整性与严密性。他也是超越这本书的第一人,揭示了它丰富的宝藏,以及更深刻的数论的秘密。

在1837年科学院的一次会议上,狄利克雷展示了他关于解析数论的第一篇研究报告,将这一基础理论纳入其中:任何等差数列(除了明显的例外)都包含无穷多个素数。从狄利克雷的论文可以清楚看出,他非常勤勉地寻找一个一般的数论方法,不依赖于特别的素因子分解。

这些基础论文发表过后,狄利克雷数论工作的重要性式微,他更多地转向分析和应用数学。例如,他对三角级数产生了兴趣,尤其是它们既能代表连续性函数又能代表非连续性函数的特性。柯西1823年就研究过这类级数的收敛。狄利克雷几年后再次撰写这一主题的时候,对柯西的工作提出了尖锐批评。他强调推理是无价值的,无论如何结果都没有涵盖到已经建立了收敛的某些级数。狄利克雷出众的处理方法为之后许多关于三角级数的收敛或者求和的研究打下了基础。在这篇论文中我们第一次发现了方程的现代概念,虽然它仍然摆脱不了关于连续性的直觉概念。用雅可比的话说:"只有狄利克雷一人,不是我,也不是柯西,不是高斯,知道一个完整严密的证明是什么样子的。确实,我们最早是从他那里学到了这个。当高斯说他证明了什么的时候,一切会很明确;当柯西说这句话的时候,大家可以打个赌,赞成和反对各一半;当狄利克雷说这句话的时候,那就是毫无疑问了。"

日记作者赫斯特1853年在柏林拜访了狄利克雷,当时他已经年近五十,赫斯特将他描述成一个个头很高、瘦瘦长长的男人,上唇和下巴

处的胡子快要灰白了，声音有些刺耳，听力相当不佳。之后赫斯特听了一节他的课，并评论道：

在材料的丰富度和对材料的清晰洞察力方面，狄利克雷无可超越。作为演讲者他没有先天优势——他讲话并不流利，但是一双明澈的眼睛和他的理解力让这些变得无关紧要。你不花点功夫是注意不到他讲话中的不连贯的。奇特的是，他从来不看他的听众——当他不用黑板的时候，他会转过身来，坐在高高的讲台上面对着我们，将他的眼镜推到前额，用双手托住头，他没有完全被手遮住的眼睛几乎全闭着。他不用笔记，他能从他的手心里看到他假想中的计算，并大声读给我们听——我们理解这一计算，仿佛我们也能看见它。我喜欢这种上课方式。

当高斯1855年去世时，格丁根大学——这所长期沐浴在枢密顾问科学名声光芒下的学校——急需寻找一名学识渊博的继任者。黎曼已经过世，这一选择落在了狄利克雷身上。在柏林，系于他那大学相对较低职位上的教学任务已经非常繁重，而那些军事学院的教学任务则既费力又无科学魅力。他曾写信给他的学生克罗内克（Kronecker），说他极少有时间用于通信，因为他一周要上13节课，还有许多其他事要做。所以当格丁根教席的要约到达后，狄利克雷告诫普鲁士当局，除非能够减轻他在军事学院的工作负担，否则他会接受该职位。当局没有把这威胁太当回事，直到一切都太迟了以后，教育部才提出要增加他在柏林大学的工作量和薪水。

1855年秋，狄利克雷搬去格丁根，买了一栋带花园的房子，在这个以其杰出大学为特色的古老小城里享受着更为宁静的生活。很多有能力的学生前来追随他，他也乐于用多出来的时间做研究。在这最后时期，他的工作重心是力学问题，他告诉他以前的学生克罗内克他发现了一整套全新的处理它们的一般方法。这套方法是什么现在无人知晓，

因为结果表明狄利克雷只剩几个月可活了，他一门心思全扑在了准备纪念高斯的演讲上。1858 年夏天，他在日内瓦湖畔的蒙特勒度假时突发心脏病，大费周折才得以回到格丁根。不久之后，他的妻子丽贝卡中风去世，接着在 1859 年 5 月 5 日，狄利克雷自己也跟着她走了，享年 54 岁。

哈密顿(1805—1865)

我们现在来到爱尔兰，在这里威廉·罗恩·哈密顿(William Rowan Hamilton)被一些和他同时代的人认为在智力上接近牛顿。他对人们了解动力学和光学做出了重要贡献，他发明了四元数，并在图论领域建立了他所称的“二十面体计算”。在我们的系列故事中，没有其他人特别像他。由于多重原因，他的影响不像本来可能有的那么大；尤其是他没有试图建立一个爱尔兰数学学派。



阿奇博尔德·哈密顿(Archibald Hamilton)，一位为热心的爱尔兰民族主义者阿奇博尔德·哈密顿·罗恩(Archibald Hamilton Rowan)做代理的律师，居住在都柏林。和他的妻子萨拉·赫顿(Sarah Hutton)一样，他有苏格兰血统。1805 年 8 月 3 日和 4 日之间的午夜钟声敲响的时候，他们唯一的儿子威廉，这位未来的数学家，出生了。也许因为他父亲的财政状况日趋紧张，这个男孩在 3 岁的时候被送去和他的叔叔詹姆斯·哈密顿(James Hamilton)牧师同住，此人是都柏林西北 64 千米的寂静乡村特里姆的教区学校校长。他叔叔是一名毕业于都柏林三一学院的古典派学者，与此同时，他当了一辈子当地圣公会教堂的负责人。他的房子坐落在壮观的中世纪遗迹间，靠近博因河。政治上詹姆斯·哈密顿是一

名保守党成员，是将爱尔兰归入联合王国的《合并法案》的支持者，并且支持新教优势。威廉儿时同父母几乎没有联系。他的四个姐姐有时会来特里姆陪他，这个家庭的两边都有亲戚关注着他的成长。当他的母亲于 1817 年去世后，他父亲续了弦，但是不久之后自己也过世了。

一到达特里姆，这个男孩就开始接受教育，很快就展现出他是个神童。他的叔叔计划在适当的时候送他进三一学院，并且给了他很多鼓励。神童一般都在语言、数学或者音乐上有着过人天赋；这个男孩在音乐方面没什么天资，但是他学语言很快，据说他 10 岁的时候不仅会说拉丁语、希腊语和希伯来语这些古典语言，还会一点现代的欧洲语言和少数几门东方语言（显然因为他父亲认为他将来可能会在东印度公司有所发展）。他同时也有点计算方面的天才，并终身都在这一方面保留着一种不可思议的能力。他正经的数学教育开始于 13 岁时对欧几里得几何的学习，接着他又读了牛顿和拉普拉斯的著作。

1824 年，19 岁的哈密顿进入三一学院，同年发表一篇短文纠正了拉普拉斯作品中的一个小错误。幸运的是，这所学院里的数学课程刚刚经历了改革，在很大程度上以巴黎综合理工学院教授的内容为基础。在三一学院的四年间，哈密顿在一次又一次的竞赛中拔得头筹。学院因他的表现两次颁给他“荣誉优等生”称号，这项荣誉非常稀罕，因为这样的奖项已经 20 年没有颁发过了。

还只是学生的时候，哈密顿就完成了计划要写成一本光学专著的第一部分。这篇他向爱尔兰皇家科学院提交的论文，论述了焦散线，即反射和折射产生的光线图案。哈密顿证明了光沿最小作用量的路径传播，并且他用代数函数以数学表达式表示了它的路径。一开始论文被驳回，但第二年一个修正版本被接受，并被科学院以《光线系统理论》（*The theory of systems of rays*）为题出版。这成就了他的名声，并为他下一个十年的研究定下了方向。在某些方面，哈密顿被蒙日的一位名叫马吕斯（Etienne Malus）的学生抢在了前头，他的论文修正版本也承认了这点。那时蒙日对哈密顿研究的影响非常显著。有趣的是，这篇论

文差不多和高斯《关于曲面的一般研究》(*Disquisitiones generales circa superficies Curvas*)同时发表,后者标志着内蕴微分几何开始建立,而哈密顿的理念和高斯的有很多共同之处。

此时哈密顿也许本要参加研究员考试,这是他最早来到这所学院的夙愿。然而三一学院的研究员必须要担任圣职,而且至少在理论上,要独身禁欲。此外,研究员的身份还伴随着辅导学生和管理学院的义务。研究员的辅导任务很繁重,留给科学研究的时间几乎没有。然而,另一种可能性出现了。

1827 年三一学院的天文学教授职位空缺,哈密顿受邀接任。未来的皇家天文学家艾里(George Biddell Airy),显然更加胜任此职位,但他因薪水低决定不接任。尽管哈密顿年纪轻轻,缺少经验,他还是被任命为安德鲁斯天文学教授,并因此成为爱尔兰皇家天文学家和敦辛克天文台台长,虽然他还没有拿到学位。终其一生,哈密顿都保留了后面这些职位,并且在天文台安家,但他从没成为过一名成功的实干型天文学家,几年以后他放弃了实践工作的尝试,专注于数学研究。

履新之前,哈密顿在一位苏格兰工程师兼测量员尼莫(Alexander Nimmo)的陪同下第一次游览了英格兰。他们的行程包括湖区,在那里他们和诗人华兹华斯(William Wordsworth)一起喝茶,他将他们引荐给诗人骚塞(Southey)。同早于他的柯西和晚于他的西尔维斯特(Sylvester)一样,哈密顿更希望自己是一位诗人,这次造访后,他寄给华兹华斯自己的一篇诗作。后者评论该诗"活跃着真正诗的精神",并且"显而易见是强烈情感的产物",但又解释说只靠情感不能创造好诗。"逻辑能力和诗歌的关系比缺乏经验的年轻人(不管是作者还是批评家)所能够想象的要大的多。"哈密顿并没有因这老练圆滑的批评而止步。他一生中大部分时候都混迹于文坛。住在都柏林附近的小说家玛丽亚·埃奇沃思(Maria Edgeworth)成了他的一位密友,通过她哈密顿认识了其他一些作家。其中之一是柯尔律治(Samuel Taylor Coleridge),他的康德哲学观点非常吸引他。

哈密顿的主要数学著作中，最重要的一部是《一种动力学的普遍方法》(*The General Method in Dynamics*)；这也是他花费时间最少的一部书。本书将他快速创造一套在一般性和抽象性上无可匹敌的宏大理论体系的能力体现到极致。这套体系直接出自他的《光线系统理论》，但是值得一提的是，后一套理论产生自分析力学。拉格朗日认识到，*A* 和 *B* 两点间的光线会是所有从 *A* 到 *B* 路径的作用量积分中的最小值。所谓的哈密顿原理，同拉格朗日最小作用量原理相似，但是它的优点是：在“特征函数”施加的特定约束下，终点 *A* 和 *B* 可以改变。他称之为变化作用量原理。因为早就认识到任何寄到爱尔兰皇家科学院的东西可能要花数年才能发表，发表以后印量也很有限，于是 1834 年哈密顿将他的新理论寄给伦敦皇家学会，以发表在《皇家学会哲学会刊》(*Philosophical Transactions*)上。这一理论立即在欧洲大陆被采用，尤其是雅可比，他在一篇关于这一课题的论文中，将哈密顿称为“都柏林杰出的皇家天文学家”，之后又称他为“贵国的拉格朗日”。随着 20 世纪量子理论的出现，哈密顿原理迎来了春天，因为它是几乎可以直接转换成量子力学的一种古典力学形式。

哈密顿的光学研究，建立在光波动学说的基础上，以他对锥形折射现象的预言达到顶峰，这一理念之后被实验证实。艾里甚至将它描述为也许是所有预言中最为不寻常的一个。德国数学家、物理学家普吕克写道：“从来没有什么物理实验给我留下这样一个印象……这件事闻所未闻，完全找不到可以类比的对象。”1835 年，这一发现为 30 岁的哈密顿赢得了伦敦皇家学会颁发的皇家奖章和爱尔兰总督代表国王授予的骑士身份。在很多方面这都是他职业生涯的全盛时期。

哈密顿受洗时被赐名威廉，但之后他加上了罗恩，他父亲前雇主的姓，希望能从那一方获得庇护；因此之后的日子里他以威廉·罗恩·哈密顿爵士著称。19 世纪 30 年代他异常活跃。这是他最多产的几年，因为他同时钻研了光学、动力学和代数学。在这十年里他还通览了哲学，被柯尔律治的想法吸引。他还似乎有着几乎无限的体能。我们了

解到他会沿着天文台屋顶的护栏行走，还有其他恶作剧行为。他在他最喜欢的姐姐伊丽莎(Eliza)的陪伴下，又去了一趟英格兰，并且这次和华兹华斯在赖德尔芒特呆了近一个月。

这段时期哈密顿有过几次浪漫的爱恋，而有一次尤其突出。这是对凯瑟琳·迪斯尼(Catherine Disney)的倾慕，他对她神魂颠倒。虽然她也被哈密顿强烈吸引，但家庭压力让她嫁给了别人，结果哈密顿试图自杀。在另一位年轻女士拒绝了他的主动接近之后，哈密顿感到婚姻在躲着他，在绝望中他向某个叫海伦·玛丽亚·贝利(Helen Maria Bayly)的女人求婚了。她来自蒂珀雷里郡一个小贵族之家，同她的守寡母亲住在一个农场。结婚之前，他意识到她有可能会长期患病，而且她有病理性的害羞胆小。一个朋友说她没有"吸引人的美丽脸庞或智力"，"不能很好地管理一家事务"，而且完全不能"对她丈夫的习惯施加控制性的影响"。她在犹豫和经过很多次摇摆之后于1833年9月嫁给了哈密顿；婚后她继续与贝利家的几位成员生活了很长时间。他们的第一个孩子，威廉·埃德温(William Edwin)，于第二年5月出生。哈密顿对这个婴孩朗诵了华兹华斯的《不朽颂》(*Ode on Intimations of Immortality*)。之后的日子里，威廉让他的父亲产生了财务问题。第二个儿子名叫阿奇博尔德·亨利(Archibald Henry)，一年后出生；他成了一名牧师。他们唯一的女儿海伦·伊丽莎·阿梅莉亚(Helen Eliza Amelia)出生于1840年8月。

哈密顿是个虔诚的信徒，他妻子的强烈信仰对他来说很重要。尽管她疾病缠身，她仍然是他生命的中心人物，并在某些程度上让他形成了她那种与世无争的习惯。如果他觉得她那虚弱身体和性格是一个负担，也是他愿意接受的。不过他的朋友注意到了他身上的一个改变。他变得更加孤僻、更加内向，防备心比以往任何时候都重得多。他常常惦念着过去的成就，而不是热衷于新的追求，并且他渐渐开始过量饮酒。

关于光的本质的波动理论非常有争议。该理论随菲涅耳(Augus-

tin Jean Fresnel)的著作源起法国,菲涅耳受到有影响力的拉普拉斯的强力反对,结果该理论被巴黎科学院强力打压。虽然波动理论可以很好地解释衍射和偏振,但对另一些现象,更加基于直觉的微粒学说看起来解释得更好。光的本质问题在英国科学促进协会会议日程表上的优先级很高,哈密顿在这一协会中很活跃,到 1834 年,由他担纲领导之一的波动理论的主张看起来赢得了争论。

波动理论支持者的主要问题是要找到一个令人满意的发光以太模型,哈密顿将他令人敬畏的数学能力用在了这个任务上。柯西一直试图证明以太的行为特性应该像一种弹性固体。哈密顿和其他人则认为它肯定是由质点和质点间的力组成的。当麦克斯韦 1860 年将光等同于电磁波后终于解出了以太方程时,哈密顿的职业生涯已接近终结,并且不再研究光学。光的电磁理论本是一个他应当鼓掌称赞的解答,因为它用作用在时间和空间中的力的单一理论统一了物理学的不同部分。如果哈密顿愿意自己努力做更多实验来建立一个以太模型,他对这个问题的钻研也许可以更有成果。

哈密顿当然被卷入了这个阶段的政治辩论中,但是对他来说阻挠了爱尔兰圣公会的宗教论争更加重要。他被培养成一个新教优势的支持者。许多爱尔兰圣公会成员持有极端观点,认为只有他们可以是国家的正式一员。在英国,哈密顿出生时,不服从国教者和天主教徒已经赢得了有限的权利,但是这些权利是被勉强授予的,圣公会成员依然垄断着高等教育,控制着国会,还有一大笔可供支配的赞助资金。当然,在爱尔兰,大多数人口是天主教徒,所以那里是变革来得最快的地方。1829 年《天主教解放法案》通过,1831 年一个无宗教派别的国家教育体系建立,1833 年三所新的无宗教差别大学落成,这让大学教育更加普及(三一学院已经接受非圣公会成员)。哈密顿终其一生一直是英国国教的一位坚定拥护者。

哈密顿的《代数对理论》(*Theory of Algebraic Couples*)1835 年由爱尔兰皇家科学院出版,包含了他关于代数学的最初想法。在接下来的

几年里,意识到对于三维几何的重要性,哈密顿试图推导出一个处理三元数的 $a+bi+cj$ 的代数形式,其中 a、b、c 是实数,i、j 是虚数。1843年10月的一天,沿着都柏林皇家运河散步的时候,哈密顿突然悟到这类数值的代数运算需要几何空间中的第四维。在那一刻,他产生了研究四重数的构想,之后他把它叫做四元数。据说他把四元数的乘法公式刻在了运河上某座桥的石头上。这种乘法满足结合律但不满足交换律。一块纪念哈密顿关于四元数代数灵感的牌匾被安装在他刻了公式的那座桥上。

下一个十年,哈密顿就他的四元数理论广泛讲学,他相信这一理论会变革数学物理领域,获得和发明微积分一样重要的历史意义。虽然他的期望从来没有实现,但他的理念在矩阵代数的发展中确实起到了历史性的作用。1853年,他的《四元数讲义》(*Lectures on Quaternions*)出版。他将他生命中余下的大部分时间花在完善理论和研究可能的应用上。他的专著《四元数原理》(*Elements of Quaternions*)于1866年他死后出版。哈密顿晚年从事的唯一其他数学研究就是他所称的"二十面体计算",但是如今会被归为图论。1856年他建立了这种新计算,最初是建立在二十面体的几何性质上[柯克曼(Thomas Kirkman)有过类似的想法]。

哈密顿将他自己视为普通大众和大学一年级新生的好导师。事实上,他确实有雄辩的天资,但是一点也不适合数学基础教育。每一次这样的尝试都以基础和浅显到令他的听众难堪的论述开始;然后他会突然转向他们完全不能理解的内容。他在书面说明上也没有好到哪儿去。他的论文总是离题。一个好例子是他的《四元数原理》,原本是打算作为一个简短的指南,因为他之前的著作《四元数讲义》对学生来说太长太超前了。然而,这本短指南最终写到了超过800页。因为他在天文台工作,大部分时候独自一个人,他和学生很少联系。他唯一真正的弟子是苏格兰自然哲学家泰特(Peter Guthrie Tait)。

盛年时的哈密顿喜好交际、天性快活。他广泛的朋友群里有德摩

根(Augustus De Morgan)和约翰·赫歇尔(John Herschel)。哈密顿和附近科克郡女王学院的数学教授布尔(George Boole)之间很少联系,这一点令人难以理解。唯一有记录的联系是,有一次德摩根请哈密顿帮忙为布尔的书找一名出版商,后一年布尔又请哈密顿为他写一份推荐书。除此之外,这两位数学家显然就和对方没什么交集了;也许仅仅是因为哈密顿对布尔研究的那种数学没有兴趣。

1837 年,哈密顿被选为爱尔兰皇家科学院院长,这是一个永久职位,他去世不久前还成为华盛顿美国科学院的第一位外籍院士,他对此特别满意。他被选为柏林科学院和巴黎科学院的通讯院士,并且被邀请成为伦敦皇家学会的会员,但他因为经济原因婉拒了。不过他是英国科学促进协会的一名活跃成员,发表论文,担任部门主席,以及在每次会议的宴会上发表演讲。

在生命的最后阶段,哈密顿沉迷于浪漫的幻想中,并且同他很多诗篇的主题凯瑟琳·迪斯尼进行了长久且秘密的通信,他对她(或者说是理想化的她)从未停止过迷恋。1865 年夏天,经受了多年来时不时发作的痛风之苦后,哈密顿病重。对他来说,最大的问题就是让自己不再担心工作和钱。他或多或少的长期银行透支急剧增加。意识到死亡可能很快降临在他身上,他尽心竭力地写作《四元数原理》一书。到 8 月底,很明显他活不长了,1865 年 9 月 2 日,死亡在他 60 岁时来临。他的妻子海伦比他多活了四年。哈密顿的医生煞费苦心地报告,虽然死因不能确定,但并不是因为酗酒;不过不容置疑的是,这是他生命最后阶段的一个严重问题。

刘维尔(1809—1882)

接下来这篇人物传略带我们回到法国。约瑟夫·刘维尔(Joseph Liouville)在数论、微分几何、天体力学和理性力学方面做出了显著的贡献。他是一位多产的作者,就数论发表了至少 200 篇论文,在其他学科

上也著述颇丰。他创立的期刊,相当于法国版的"克雷尔杂志",一直活跃至今。



法国军官克洛德-约瑟夫·刘维尔(Claude-Joseph Liouville),和他的妻子泰雷兹[Thérèse,娘家姓巴兰(Balland)]是来自洛林地区中上阶层的一对伉俪。他曾被派往位于加来和里尔之间的圣奥梅尔,在那儿他们的次子约瑟夫,未来的数学家,于1809年3月24日出生了。很快刘维尔一家回到洛林,这个男孩在科梅尔西和图勒接受了早期教育。已经有了一定古典文学基础的他去往巴黎,在圣路易斯学院学习数学,在那儿他熟习了当时的数学文献,并且很快发现他可以添加他自己的评论。其中一些评论出现在1824和1825年的热尔岗《数学年刊》上,当时他只有大概15岁。

1825年,他被巴黎综合理工学院录取,16岁时进入该校。正如我们已经看到的,该校的数学课程已经经过了柯西的改革,柯西本人仍在那里执教数学。然而刘维尔学习的是另一门由物理学家安培教授的类似课程,他是一个比柯西更好的讲师。综合理工学院的学生可以上皇家学院,即后来的法兰西学院的课程,刘维尔在那儿再次听到了安培的课,这次是关于电动力学。两年后,他决定要成为一名工程师,于是转学去了更加职业化的巴黎路桥学院,追随柯西本人的脚步。然而,到1830年毕业时,他断定自己的健康状况不能适应工程师野外生活的艰苦,因此决定成为一名数学家。同年,刘维尔娶了表妹玛丽-路易丝·巴兰(Marie-Louise Balland),之后很快向巴黎路桥学院递交了辞呈。为了供养不断扩大的家庭,他接了好几份学校教职。

刘维尔1831年在巴黎综合理工学院以一名助教的身份开始了他的学术生涯。两年以后,他又成为了巴黎中央工艺制造学校的一名讲

师。该校组建不久，其目的是为私营机构训练与科学有关的工程师，就像巴黎综合理工学院为政府部门做的一样。起先它是一所私立学校，但之后它被政府收购，并获得了精英院校的地位。一开始刘维尔的教学被批评为与实际应用关联太少，但不管怎样，接下来的五年他坚持并留在了中央工艺制造学校。

到此时，刘维尔已经博览了数学经典文献和当时的文献。他已经在为学术刊物撰写电理论和热理论的文章，这是他成果丰硕的学术生涯的开端。初期，他开始向巴黎科学院寄送研究报告，为争取成为候选人做准备，同时他也参加了年度大奖的角逐。其余竞争者之一是伽罗瓦。不幸的是，该奖项这次没有颁给任何一位应征者，而是颁给了阿贝尔（逝后追赠）和雅可比，以奖励他们在椭圆函数上的工作。院士们如此行事，也许是希望抵偿他们之前对阿贝尔的忽视，但是当然地，他们也因此成功做到了对伽罗瓦的不公。刘维尔在其他地方发表了他自己的作品。

虽然热尔岗的《数学年刊》是一本有用的数学研究期刊，但是它混杂了高质量的文章和很多平凡的文章。1826 年，克雷尔创办的德国版“克雷尔杂志”很快就达到了一个比《数学年刊》高得多的水准。尽管没有什么能阻拦他们这么做，但大多数法国数学家并不愿意给“克雷尔杂志”投递文章。然而，刘维尔是其中一个愿意这么做的，这归功于他意识到了德国不断提升的数学声誉。刚好《数学年刊》不得不暂停发行，因为热尔岗本人被任命了一个新职位，这占据了他大部分时间。意识到现有的数学研究缺乏法语表达途径，刘维尔决定自己创立一本新期刊，即著名的法文版《纯粹与应用数学杂志》，它与克雷尔的杂志同名，但它是法语的而不是德语的。热尔岗认可它可以被看做是他《数学年刊》的继承者；事实上它很快就被证明达到了“克雷尔杂志”的水准，大大超越了原先的《数学年刊》。除了鼓励他知道的最优秀的数学家为它撰稿，刘维尔也会把克雷尔发表的重要外语论文委托人翻译成法语。因此，由于个人的主动性，现在法国和德国都有了高质量的研

究期刊，“克雷尔杂志”和“刘维尔杂志”。

那个时候的出版过程比现在要快得多。刘维尔将编辑工作的优先级置于他其他工作之上，即使在他度假的时候也不会怠慢。然而有时候他不能克制住对递交上来的论文进行加工，有人抱怨称有时他发表了他自己的工作，却没有注明其来源。刘维尔一定对自己有着非常大的自信，相信他这个 26 岁的助教有能力评判当时最前沿数学家的作品。然而，他编辑的“刘维尔杂志”取得了近 40 年的巨大成功，一直持续到 1874 年，并且在许多方面是他最大的职业成就。他的动机一点儿也不商业化。

一个争取到科学院一席的机会出现在 1833 年，勒让德去世之后。在很多方面刘维尔都是一个强有力的候选人，但是空缺极少出现，而且有许多游说和竞争。其他候选人都更加资深，他只争取到了一票。三年后，巴黎综合理工学院的一个教授职位空缺；刘维尔有资格担任，因为他刚刚拿到了一个博士头衔，所以可以得到一个大学教授职位。他是一个有力的竞争者，但是在一次势均力敌的竞选过后，他只排名第二。下一个机会出现在法兰西学院。与其他高等教育机构一样，该学院的教授是终身制的，而当他感到不再能够承担教职时，通常是申请任命一名副职，可以领到教授职位三分之一的薪水。柯西曾经在他职业生涯的某个阶段担任过副职，现在刘维尔也效法了。他决定从中央工艺制造学校辞职。很快巴黎综合理工学院本身又空出一个职位，1838 年刘维尔被任命为分析与力学课程的教授。同一年他成为法国荣誉军团成员，之后被擢升为军官。

有才干的瑞士数学家斯图姆是刘维尔的一位密友。当下一个相关空缺在科学院出现的时候，刘维尔慷慨地站开，以帮助他竞选。不过 1839 年出现了另一个空缺，这次是在天文学部，而且因为看起来未来很长一段时间都不会有一个数学家出现在这个位子上了，刘维尔决定参选。为了增大获选概率，他发表了他早些时候完成的关于天体力学的几篇研究。1839 年竞选开始时，经过一番激烈的角逐，刘维尔最终

成功了。下一年他又被选入享有名望的法国经度局。而且,靠着当时正在拜访巴黎的狄利克雷的影响,刘维尔被选为柏林科学院的一名通讯院士。狄利克雷自己于1833年当选巴黎科学院的类似职位。

因此,在他31岁那年,刘维尔到达了他职业生涯的顶峰,成为巴黎科学院、法国经度局的成员,同时是巴黎综合理工学院的教授。教学和行政职责占据了他大部分时间,但即使如此,19世纪40年代他处于其科学创造的巅峰。到1857年为止,他写了超过100篇长篇论文,主要是关于分析学的,但也有关于如几何、物理、代数和数论等主题的。后来,虽然他继续发展大型理论,他一般只发表短小的札记。

在巴黎综合理工学院,刘维尔承担了很多行政工作。法兰西学院则给了他更多将他的科学思想表达的途径。然而,他在那里的位置仍然是不牢靠的副职,能不能保住职位全凭任命他的教授高兴。所以当纯粹数学的教授职位空出时,刘维尔自然而然地提出了申请。柯西最近刚从他的自我放逐中归来,他不在的时候丢掉了他之前的教职,他也提名了自己。虽然刘维尔和柯西关系很不错,但刘维尔是认为柯西发表文章次数过多的人当中的一个:"柯西先生不是那种不发表自己发现过的或者甚至有时候是重新发现的东西的人;他宁可发表一篇东西十次,也不会忘记发表一次。"

尽管如此,刘维尔对柯西发表文章行为的批评态度并没有妨碍他对其科学天才的认可,并对他尊敬有加。刘维尔在竞选中站开支持柯西,就像他之前支持斯图姆的情形一样,但是这时政治立场开始起作用了,大多数有选举权的人,那些不是数学家甚至不是科学家的人,更倾向于利布里,就是我们之前因为索菲·热尔曼的关系已经说到过的那个意大利人。利布里在宫廷受到赏识,在那儿他的政治观点比起柯西的更加为人接受。刘维尔知道利布里可以说是一个招摇撞骗的人,当选举结果被公布的时候,他感觉有必要辞掉法兰西学院的职位,作为一种抗议的表示。

在其前10或15年的院士生涯中,刘维尔是最活跃的科学院院士

中的一员。在他如日中天之时，他是让人印象最深刻的科学演说家。这个时期，大多数法国数学家认为巴黎是所有数学活动围绕的永恒中心，他们也懒得去跟上世界其他地方的进展。通过他在国外的人脉，刘维尔在德国开始超过法国成为领先数学力量的时候，起到了无法估量的作用。他与德国数学家的大多数联系是通过狄利克雷，他同狄利克雷保持着常规通信。而刘维尔在其他国家也有很多联系人，包括在大不列颠和爱尔兰。

法国经度局的成员收入不菲；为了供养家里的三个女儿和一个儿子，刘维尔得依靠这笔收入作为他在巴黎综合理工学院担任教授收入的补充。他于 1843 年、1847 年和 1872 年三次担任法国经度局的局长。第一次他不得不处理柯西成员资格的尴尬问题。主要是因为柯西拒绝宣誓效忠路易 - 菲利普，他想让柯西恢复原职的努力并未成功。在其他时候，刘维尔似乎把法国经度局当成了另外一个科学院，一个既能宣传他自己的科学观点，又能宣传他朋友的观点的地方，尤其是雅可比。

1848 年，刘维尔短暂从政，以一名温和共和党人的身份在国民议会赢得一席，但是没能在众议院获得席位，下一年他所在的那个党被未来拿破仑三世的支持者打败。正如我们在索菲·热尔曼的传略中看到的那样，利布里在被发现从多个机构偷窃值钱的书和手稿后逃跑了。这导致法兰西学院的又一个职位空缺，并且尽管柯西再次被提名为候选人，这次是刘维尔得到了任命，他随即离开了巴黎综合理工学院。除了在法兰西学院教书以外，他还在大学担任理性力学的教授。

在刘维尔葬礼的悼词中，他的讲课被高度赞扬，但他似乎只有在讲授高水平的课程时才能发挥得最好，他的教学也总是针对最顶尖的学生。他之前的一名学生如此评价："每个认识他的人都知道他的欢迎词有多么亲切，与他对话有多么有趣。跟他说话你几乎很少不在某些方面受益。他喜欢鼓励年轻人，给他们建议来帮助他们。当他结束在

法兰西学院的讲课,他喜欢让一些学生跟着他回家,在和学生们的漫长又有趣的对话中,他常常会忘记午饭时间。"

米塔-列夫勒(Gösta Mittag-Leffler)回忆起他同刘维尔的第一次会面:"他无比亲切地欢迎了我,还说了下面的话:'我认为友善地欢迎所有年轻且前途无量的数学家是我的责任',接着又说:'你能想象么,我见过阿贝尔但是没认出他,我也已经仔细观察过了伽罗瓦。'刘维尔总是将这看做他最大的伤心事中的一件,他遇见过阿贝尔,却错失了认出这位伟大数学家的机会,在他看来,这是他遇到过的最伟大的数学家。"日记作者赫斯特于 1857 年拜访了他,并记录道:"他是一个讨人喜欢的、健谈的、瘦小的男人,我很快就感到和他在一起无比轻松。我观察到的唯一瑕疵是,他偶尔会毫无由头地咯咯笑。"

刘维尔是第一个一丝不苟地研究伽罗瓦著作的数学家。到了 1843 年,他开始信服它们的重要性,计划将它们发表在他的"刘维尔杂志"上。他评注道:"我看到了伽罗瓦证明方法的完完全全的正确性,尤其是这个美丽的定理:素数次不可约方程有根式解的充要条件是,所有的根是其中任意两个根的有理函数。"然而,他看出在推理中仍存在漏洞,于是他推迟发表它们直到他填补了这些漏洞。伽罗瓦的论文最终发表在"刘维尔杂志"1846 年卷中。意大利数学家贝蒂(Enrico Betti)六年后为它们写了一篇评论,渐渐地伽罗瓦的理论开始被广为认识且理解。

19 世纪 50 年代早期,刘维尔继续在科学院内发挥着重要的影响力,但之后很快衰减。他依然帮助着年轻的新秀们,比如俄罗斯的切比雪夫(Chebyshev),但是他比以前更频繁地与他的同事们产生对立,而且很多他之前的学生和弟子都转而反对他。虽然他继续享受着担任有能力却无经验的年轻人导师的角色,但他发现很难接受他们开始与他平起平坐,或者甚至超越他,就像埃尔米特那样。

刘维尔在大学的职责包括繁重的教学任务,这和他每况愈下的健康一起,导致了他研究成果的减少。他开始零碎地发表他的作品,且不

加以证明。关节炎和痛风迫使他经常取消讲课;不过巴黎大学的一名工作人员回忆起,他作为一个需要人搀扶的老人家,却在每次上课时都能创造奇迹,只要他站在黑板前,就可以重新获得他所有的敏捷才思和年轻面貌。刘维尔一家主要住在巴黎的拉丁区,但是他们通常会在洛林消暑,他就是在那儿长大的。1876 年他们离开巴黎,退休去了图勒。刘维尔本人于 1882 年 9 月 8 日在巴黎去世,享年 73 岁。他的妻子和唯一的儿子先于他四年去世。

仅从数学研究的角度说,刘维尔被柯西远远超过,后者是他所在时代法国最前沿的数学家;他也比不上埃尔米特,后者将引领下一个时代。然而,他也有一些归功于他的卓越发现。1836—1837 年间,他发表了一些同他朋友斯图姆合著的论文,是关于之后被称为"斯图姆-刘维尔理论"的,在物理学中地位重要。之后他证实了超越数的存在,这是不能由整数经由代数运算构成的实数。他在椭圆函数理论的发展中发挥了主要作用。他还对天体力学和数论做出了贡献,但他最知名的成果也许是复分析中的理论,单复变数的有界全纯函数必然是常数。

格拉斯曼(1809—1877)

在 19 世纪,一个大学教师从中小学教师起步并不罕见。当然,在大学里做研究的机会要多很多,但是中小学教师对数学发展做出重要贡献的例子也是可以给出的。赫尔曼·京特·格拉斯曼(Hermann Günther Grassmann)就是个恰当的例子。他的理念在他还活着的时候影响甚微,但是一旦它们被完全理解了,他就得到了认可;他应当被看做是 19 世纪更重要的先驱之一。

尤斯特·京特·格拉斯曼(Juster Günther Grassmann)和他的妻子约翰妮[Johanne,娘家姓梅登瓦尔德(Medenwald)]住在斯德丁市,它位于柏林东北方向,当时属于德国,现在属于波兰,并改称为什切青。她是一个牧师的女儿;他在成为资金充足的斯德丁文理中学的一名教



师之前，也曾是一名牧师。他教授数学和物理学，编写小学教材，参与物理学研究。赫尔曼·京特，他们十二个孩子中的老三，出生于1809年4月15日。从文理中学毕业以后，他在柏林大学学习神学和古典文学，本应该进入教会。只是在1830年回到斯德丁以后，21岁的他开始对数学和物理学产生了强烈的兴趣。他决定效法父亲，成为一名中学老师，起初在柏林，然后在斯德丁的几所学校，最后在斯德丁文理中学。格拉斯曼是个兴趣广泛的人，但显然他不大喜欢教书，并且觉得很难维持课堂纪律。

在获取中学教师资格的过程中，格拉斯曼被要求写一篇关于潮汐理论的论文。为此他建立了一套新的几何演算，让他得以简化了拉格朗日《分析力学》中的部分陈述，并改进了拉普拉斯《天体力学》中给出的潮汐理论的论述。虽然他没有在这一时期进一步发展他的理论，但他意识到了其潜在的力量，到1840年，他决定集中精力做数学研究，只要不影响他的教学任务。此时，狄利克雷已经在柏林建立了良好声誉，柏林距斯德丁不远，但是没有记录表明有任何来自这个方向的影响，也没有记录表明有来自格丁根的高斯或者柯尼斯堡的雅可比的影响。相反，他大部分是靠自学，以及从一个相当不一样的来源获得了灵感，那就是博学的莱布尼茨。

格拉斯曼详细记下了他的几何理论，出版在一本名为《线性外代数》(*Die lineale Ausdehnungslehre*，通常被译为《线性扩张论》)的书里，1844年面世。这本书，计划是作为本主题系列中的第一卷，非常抽象和冗长。格拉斯曼相信他的扩张演算同莱布尼茨的某些想法有联系。在1679年写给惠更斯(Christiaan Huygens)的一封信中，莱布尼茨谈到需要一种新的数学，它与位置(他用的是拉丁文 situs)而不是数量相关。他将其视为一种几何，称它为分析位置或几何位置。当他在别处

用到这一术语时,一般被认为是指我们称做拓扑学的那种数学。然而这封信里所说的似乎有着不同的本质,格拉斯曼将他的想法同莱布尼茨的想法联系在一起,这也许是对的。这些陈述被深奥的哲学漫谈打断了。当默比乌斯被要求为本书写一篇书评的时候他拒绝了,因为它太抽象,但尽管如此他看起来对格拉斯曼想要做的事情有一定兴趣。后一个十年里,格拉斯曼发表了一系列论文,在这些论文中,他将他的理论应用到电动力学、机械学和代数几何学。

他常常领先于他的时代。例如在1861年,他归纳定义了整数的算术运算,并且建立了它们的代数性质,比戴德金和佩亚诺(Peano)早了数年。他修订了他早期的作品,1862年以《扩张论》(*Die Ausdehnungslehre*)为书名出版。在最初的版本中,他使用了大量口头语叙述,在新修订版中,他更多地使用了数学化的表达。在第一版中他主要涉及仿射空间,在第二版里则有了向量空间。线性代数的主要理念,至少是我们现在叫做向量分析的理念,可以在他的作品里找到。尽管将一项新进步全部归功于一个人常常是不对的,但看起来就是格拉斯曼第一个意识到了不依赖坐标概念的重要性。而且,在一个几何还局限在欧几里得平面和三维物理空间的时代,他已经做好了向更高维度挺进的准备。也许他最引人注目的技术性贡献是引进了外代数的有用概念,它也被称为格拉斯曼代数,正好为现代微分形式论提供了正确的框架。

他的理论的两个版本之间,相隔了近20年时光。在这期间,除了发现了几项应用,他还参加了一次大奖赛,主题是"示性",莱布尼茨在他写给惠更斯的信里用了这一表达,指代他那无所不包的"万有示性数",并且不和广为人知的欧拉示性数混淆。格拉斯曼题为《附带几何分析和莱布尼茨特征》(*Geometrische Analyse geknüpft an die von Leibniz erfundene Geometrische Characteristik*)的参赛作品获奖。评委之一的默比乌斯评论格拉斯曼的阐述总的来说太抽象,难以阅读。尽管如此,获奖论文于1847年正式发表,添上了默比乌斯写的有帮助的附录,(用现

代术语)解释了向量空间中的线怎样用相应射影空间中的点来表示。在此成功尝试之后,格拉斯曼认为,谋求一个大学职位的时候到了。当库默尔被问到他对格拉斯曼获奖论文的意见时,他汇报称该作品包含了值得赞赏的优秀材料,只是表达形式有缺陷。正如库默尔自己所展现的,以及魏尔斯特拉斯之后也会展现的,从中学教师到大学教师的过渡不是不可能发生。但尽管格拉斯曼没有放弃尝试,他在之后的职业生涯里一直都是个中学教师。

1849 年,他娶了玛丽 · 特雷泽 · 克纳佩(Marie Therese Knappe),一个波美拉尼亚地主的女儿。他们的十一个孩子中,两个幼时早夭,另外两个还没成年就去世了。活着的儿子里面,两个成了斯德丁文理中学的数学老师,一个成了医生,一个成了吉森大学的数学教授,还有一个成了卡尔斯鲁厄工业大学的机械工程学教授。格拉斯曼自己积极支持路德教会的传教活动。他编制了一本德国民歌的集子。他撰写了几本拉丁语和德语的小学教科书。19 世纪中期是现代德国国家形成的一个关键时期。格拉斯曼想要看见一个在普鲁士领导下统一的德国,采用君主立宪政体。他不相信革命和内战是实现这一目标的正确方式。他同他一个哥哥一道创办了一份报纸,推广这些政治观点。

他的另一个兴趣是物理学。亥姆霍兹(Helmholtz)当时在发展一套颜色本质的理论,格拉斯曼发展了另外一套可替代的理论。他还发展了语音的物理本质的一套理论。由于他在物理学上的研究,他被选入利奥波第那科学院。但是除了重新修订他的早期著作,如同我们看到的那样,他对数学没有什么进一步的兴趣。他仅仅注意到和他本人的观点相似的观点开始出现在其他人出版的著作里,尤其是柯西;当然独立发现的可能性确实存在。

继数学之后,格拉斯曼的主要学术兴趣在比较语言学方面,在这一领域他要成功得多。(可以回想起来高斯和雅可比也被语言学所吸引。)他成了一名梵文及梵文同欧洲语言联系的专家。同他数学著作的被接受程度形成对比,他的语言学研究的重要性很快被其他学者认

可;例如,1876年他获得了蒂宾根大学的荣誉博士学位。一段时间疾病缠身之后,他于1877年9月26日心脏病突发去世,享年78岁。

在1862年《扩张论》的前言中他写道:"我仍旧充满信心,我在这里呈现的这套科学中所花费的精力不会被浪费。它们占用了我生命中很大一部分时间,也是我的才智运用最剧烈的地方。但是我知道并且感到有义务说明……即使这部著作会在接下来17年甚至更长时间内再次被束之高阁,没有进入科学的实际发展过程,但那个时刻仍会到来,它会从被遗忘的尘埃中被提起,现在沉寂的思想会开始孕育果实。"在格拉斯曼死后不久,他的思想开始被其他数学家所接受;值得注意的是,他的作品集,那个时代罕见的一部卓越作品,不过17年后就开始出版。克莱布什(Alfred Clebsch),也许是那个时期德国领头的数学家,是首先注意到它们重要性的人中的一个;在他英年早逝之后,是克莱因促进了它们的传播,同时使他自己同"格拉斯曼流形"保持距离。

在《数学纪事》(*Mathematische Annalen*)上为格拉斯曼写的讣告里,克莱因观察到他的拥趸现在视他为殉道者,因为他终其一生没有受到应得的认可,并且从原则上反对"哈密顿体系",这一体系相信四元数的重要性。格拉斯曼著作的一大特征是他对隐式定义的偏爱——在这种定义中,一个数学实体是通过它的形式化性质而不是通过显式的构建来表示的。为了成功做到这点,需要一个基本的集合论基础,但是格拉斯曼如此接近抽象代数中环和向量空间这样的基础概念,是非常了不起的。先驱者的工作通常仅仅是被并入研究科目的主流中,而没有归因于其人。

第四章

从库默尔到凯莱

我们接下来要讲述的 6 位数学名家生于 1810—1821 年的 12 年间。其中 2 位来自英国,2 位来自德国,另外 2 位分别来自法国和俄国。

库默尔(1810—1893)

19 世纪后期,柏林大学成为数学世界的领先大学。继狄利克雷之后,三个人对此做出了特别贡献,按年龄顺序排列为:库默尔(Ernst Eduard Kummer)、魏尔斯特拉斯和克罗内克。他们性格各异,职业生涯大相径庭。库默尔和魏尔斯特拉斯从中学教师起步,克罗内克则是商人。虽然魏尔斯特拉斯成了三巨头当中的领军人物,我们还是从库默尔开始说起,因为他最年长。

19 世纪属于德国的索拉乌,位于柏林和布雷斯劳中间,现在是属于波兰的扎雷。恩斯特·爱德华·库默尔——这是他的全名——1810 年 1 月 29 日出生在那儿,比刘维尔晚出生一年。他的父亲,医师卡尔·戈特黑尔夫·库默尔(Carl Gotthelf Kummer),1813 年死于伤寒,



之后恩斯特和他的哥哥卡尔(Karl)被他们的母亲弗里德里克·索菲亚[Friederike Sophie,娘家姓罗特(Rothe)]带大,她历经艰辛才负担起送她的儿子们到当地文理中学上学。1828年从那儿毕业以后,库默尔进入哈雷大学学习新教神学。不久后他放弃这项专业的学习,转向了数学。1831年,库默尔凭借他的一篇论文获得一个大学奖项,论文是关于一位数学教授提出的三角函数问题,这位教授是他母校的一位充满热情的教师。那些日子里,这样的练习总是用拉丁语写就;之后库默尔支持了用本国语言代替德国大学使用的学术拉丁语的运动。

同年,库默尔通过了中学教师的资格考试,并凭借他的获奖论文被授予了博士头衔。在他的母校完成了一年实习,此后10年他在重镇利格尼茨(现名莱格尼察)的文理中学教书,那里距离布雷斯劳不远。他卓越的教学天赋很快彰显。他主要教授数学和物理学,他这段时期的学生包括克罗内克和约阿希姆斯塔尔,两人都受到他的激励而成为了数学家。这段教学时期恰好是他函数理论研究的第一个创造性时期,尤其是在超几何级数方面。

当雅可比看到库默尔的成就时,留下了深刻印象,这促成了他们之间的定期通信。狄利克雷也对他深感钦佩,1839年推荐他成为柏林科学院的通讯院士,而此时雅可比正力图为他争取一个大学职位。这导致了库默尔1842年被布雷斯劳大学任命为正教授。在他履职13年的这个岗位上,他对所有的数学授课都尽职尽责,从初级课程一直上到高级课程。在研究上他开始专攻数论,其后20年里他发展了他最知名的理念,尤其是理想数的理论。

如我们所知,狄利克雷离开了柏林大学,于1855年去格丁根大学接替高斯。之后德国的大学间产生了一系列其他的数学家迁移。狄利

克雷推荐库默尔作为他在柏林大学的接班人,他的建议被采纳。库默尔被提拔为柏林科学院的正式院士,并且和狄利克雷一样,成为了帝国军事学院教授,同时也是柏林大学教授。他以前的学生克罗内克也于1861 年被选入科学院,库默尔鼓励他运用在大学教书的特权。于是未来三巨头成员中的两人现在已经在柏林大学站稳脚跟了,库默尔也开始替魏尔斯特拉斯谋职位,此人有可能得到库默尔 1855 年空出的布雷斯劳大学教授一职。不过,库默尔设法把他之前的学生约阿希姆斯塔尔安排到了布雷斯劳大学,所以魏尔斯特拉斯得以补齐柏林大学三巨头。

19 世纪的德国大学里,研究方法和技巧主要在研讨会、研究所、实验室和博物馆得到发展。由于研讨会这个名称已经有些降格了,在此应当解释一下,这些早期的研讨会实际上是有关大学内部官方组建的单位。每个研讨会都有它自己的预算,可能还有它自己的图书馆。对学生而言,研讨会的会员资格是受限的。每个加入研讨会的学生都需要针对指定主题发表演讲,并以其他方式积极参与。虽然那时研讨会在人文学科中很常见,但直到 1825 年第一个德国科学研讨会才在波恩大学建立,很快哈雷大学和柯尼斯堡大学也有了。纯粹数学领域的第一个官方研讨会 1861 年在柏林大学建立,它变得举足轻重。看起来它是同时受到了雅可比领头的位于柯尼斯堡的非官方研讨会和狄利克雷管理的一个非正式研讨会的影响,一开始建在柏林大学,之后移到格丁根大学。正是库默尔,在魏尔斯特拉斯的支持下,带头说服当局允许建立了这个机构。

库默尔在柏林大学所开的课程,总是准备得最为精心,覆盖解析几何、力学、曲面理论和数论。它们吸引了大量学生——有时多达 250 人。尽管魏尔斯特拉斯和克罗内克习惯于在讲课中展示他们自己最近的研究,库默尔仍将他自己限制在夯实基础。在研讨会上他才会讨论他自己的研究,并鼓励参与者承担独立研究。在军事学院,他教授的是一群不同的听众,他还承担了一些弹道学的实验工作,让那儿的每一个

人大吃一惊。

库默尔作为一名教授所受到的欢迎程度不仅基于他讲课的明晰，也因为他的魅力和幽默感。而且，无论在大学还是在军事学院，他都关心学生的康乐，有困难时愿意帮助他们；因此他们对他的热爱有时接近狂热。库默尔的官方履历反映了他特有的客观性、保守的态度和总体而言的冷静。雅可比以他一贯的夸张性情，宣称科学的荣耀在于无用，库默尔表示同意。他也认为数学研究的目标是丰富知识，无关应用；他相信数学只有以其自身为追求的终点，独立于自然的外部现实，才能达到最高的发展。在此背景下，他对多维几何的排斥应当被提及。

对大多数人来说会成为一个沉重负担的东西，于库默尔却是一种享受，他对每种形式的教学活动都有一股掩藏不住的爱好，只要它不过多妨碍他的研究。1874 年以前，他都没有放弃在军事学院的额外职位。1857—1858 年度和 1865—1866 年度，他在柏林大学担任系主任，1868—1869 年度又担任校长。从 1865 年到 1878 年，他担任柏林科学院的常务秘书一职。他的职责之一是在正式的国事活动上发表讲话。库默尔同时也是巴黎科学院和伦敦皇家学会的外籍成员。1857 年，他意外获得巴黎科学院的某项大奖，而他从未参与过这项赛事。

库默尔的伟大和他的局限都归因于严格的自制，尤其表现在他从不出版教材而只是发表文章和讲稿。他的影响力远播，胜过他的同事克罗内克和魏尔斯特拉斯。后者曾声称，在库默尔的算术创造时期，某种程度上说（后期更显著），他不再让自己和数学界正在发生的事情相联系。"如果你对他说，欧几里得几何建立在一个未经证明的公理上，他会同意你的这一观点；但是从这一见解出发，问题就形成了：如果没有这一公理，几何会是什么样呢？这与其本性相悖；针对这一问题的努力和随之而来的普遍考虑，使它们自身摆脱了给定或预先假定的经验主义，这些对他来说是无聊的猜测，或者只不过是一个怪物。"

1840 年，库默尔娶了奥托莉·门德尔松（Ottolie Mendelssohn），狄利克雷妻子的一个表妹。8 年后她去世，库默尔续弦。1883 年，73 岁

的他突然决定退休,令他的同事们大吃一惊。他宣称他已经注意到自己的记忆力衰退,而且用有逻辑、连贯、抽象的论证来发展其想法的必备能力也退化了。其他人都没有注意到这种退化,但是库默尔不能被劝阻,他强迫系里安排一名继任者。这名继任者是他之前的学生克罗内克,关于此人后面会详述。库默尔最后几年的人生在平静的退休生活中度过,1893 年 5 月 14 日去世,享年 83 岁。他的第二任妻子贝尔塔(Bertha)和 9 个孩子都比他活得长。

对库默尔产生最为持久影响的是高斯和狄利克雷。库默尔三个创造性时期的开头都伴随着一篇与高斯著作相关的论文。他对狄利克雷的尊重感人肺腑地体现在 1860 年为柏林科学院所做的一次纪念演讲中。库默尔继而给克罗内克带来了最显著的影响,后者在 1881 年的一封信中,为他精神生活中真正最重要的数学部分感谢库默尔。诚然,这一评价作出的时间应当被记住;库默尔、克罗内克和魏尔斯特拉斯在友好、和谐的共识及密切的科学通信中共同工作了 20 年,19 世纪 70 年中期,他们发生了一次失和,导致他们几乎决裂,而上述评价发生在此之后。库默尔同克罗内克之间持久的友谊不是没有受魏尔斯特拉斯对库默尔态度反弹的影响。

今天库默尔的名字主要和三项成就联系在一起,各自出现在他的每个创造性时期。他的研究始于函数论创造时期,越过高斯的研究,他进入了超几何级数理论,尤其是,他是第一个计算出该级数单值群的人。他的算术创造时期见证了“理想数”的引入,为的是试图通过乘法处理证明费马最后定理。当狄利克雷向库默尔指出,在数域中进行确定的素因式分解看起来没有普遍有效性,他还是用公式表达了他的理想素因子理论。这使得在一般数域中进行确定的分解成为可能,在其帮助下,库默尔得以在很多情形中证明了费马大定理成立。独特的是,他详尽地阐述他的理论,但只到他感兴趣的问题(费马大定理的证明和一般互反律)所需要的程度为止。库默尔的工作经戴德金和克罗内克的研究得以发展,最终对数学的算术化做出了重要贡献。在相当大

程度上，希尔伯特的《数论报告》(*Zahlbericht*)是建立在库默尔的观点之上的。最后是库默尔的几何创造时期，在此时期他主要把自己投入到一般射线系统理论上，延续了哈密顿的工作，但是用了纯代数的方式来处理；他还构造了以库默尔命名的具有16个孤立锥顶点和16个奇异切面的四阶曲面。以上这些加上库默尔的其他成就，为他赢得了19世纪数学创造性先驱者之一的声誉。

伽罗瓦(1811—1832)

我们现在回到仍然深陷于分裂中的国度——法国。伽罗瓦(Evariste Galois)短暂一生的传奇与悲剧看起来大部分是咎由自取。



他的死亡情形看起来是对理性解释的公然对抗。在他死亡前夜写的其中一封信是这么结尾的："保存下我的记忆，因为命运没有给我足够长的生命来让这个国家知道我的名字。"伽罗瓦理论构成了现代代数学最重要、最优美的部分之一，虽然要花费一番时间才能完全理解它。

埃瓦里斯特·伽罗瓦1811年10月25日出生在皇后镇，位于巴黎的郊区。他是一所寄宿学校的校长、后来成了皇后镇镇长的尼古拉-加布里埃尔·伽罗瓦(Nicholas-Gabriel Galois)和来自一个律师家庭的阿德莱德-玛丽[Adelaide-Marie，娘家姓德芒特(Demante)]的第二个儿子。父母均受过良好教育，父亲富于想象力且慷慨大方，母亲则倔强怪异。埃瓦里斯特有一个快乐的童年，但并非传统意义上的。和高斯一样，他似乎拥有非凡的记忆力。直到12岁，他完全是由母亲教育的，她给他灌输了古典文学的知识，以及对宗教的怀疑态度。她是一个聪明、有活力和大方的女人，个性坚毅，但之后看起来完全不能约束他才华横溢、敏感又

任性的儿子。

1823年,这位未来数学家以一名寄宿生的身份进入了严厉但享有名望的路易皇家中学,开始接受正规教育。差不多就在他刚进学校的时候,有一群男生搅起了一场小暴动,质疑校方计划重新在教职员工中引入保守的耶稣会教士;结果是40个男生被开除。一开始,伽罗瓦在考试中表现优异,在竞赛中几近夺魁,只是修辞学上表现稍弱。在伽罗瓦家族中,没看出有谁对数学特别感兴趣,而且直到伽罗瓦进入路易皇家中学的第四年,他才开始学习它。他很快在这一科目上有了惊人的进步,代价是其他科目的退步。"奇特"、"封闭"但"有原创力",这些关于他性格的评论开始出现在他的学校报告中。很快这个年轻人开始学习勒让德的几何教科书和拉格朗日关于微分方程和解析函数的著作。他相信他已准备好进入巴黎综合理工学院,但是由于他缺乏针对标准教学大纲的准备,没能通过难度很大的入学考试。

第二年伽罗瓦运气很好,得以跟随一位杰出的名叫里夏尔(Louis Paul Emile Richard)的老师学习数学,后者认识到了他卓绝的天赋。之后埃尔米特也是由这位老师教授的。里夏尔热心对待伽罗瓦的数学工作,这导致了伽罗瓦17岁时有一篇关于连分数的不甚重要的论文于1829年3月发表在热尔岗的《数学年刊》上。伽罗瓦当时已经在研究方程理论了,并在两个月以后向巴黎科学院递交了他的第一篇论文。当时作为评审人的柯西似乎对它印象很好,并说他会亲自向科学院展示;伽罗瓦此时还只是个中学生。不幸的是,在打算做展示的那天柯西身体不适。不久之后伽罗瓦(也许是根据柯西的建议)将他的研究工作整合进一份研究报告中,投递给科学院竞争数学大奖,我们后面会提到。

这个年轻人的父亲是一个忠实的波拿巴主义者,那时保皇党正处在上升势头。1829年7月,他自杀了。直接原因是一些当地保皇党针对他展开的一次恶意行动,由想要将他排挤出公职的教区牧师领头。这位镇长在当地很受欢迎,于是皇后镇的全体居民捐钱建了一座纪念

碑。他的儿子悲痛欲绝;这成了他人生的一个转折点。他父亲去世几天后,他再次考砸了巴黎综合理工学院的入学考试(只允许考两次)。他之后尝试了没那么显赫但是仍然受到尊重的预科学校,这一机构之后成为了巴黎高等师范学院。不幸的是,那时的校长是一个坚定的保皇党,他在一所原本应当是世俗院校的地方强行要求学生行宗教仪式。伽罗瓦成功达到了准入要求,于 1830 年 2 月被录取,处于这个在国家教育体系中还能存留 10 年的标准条件约束下。不久他得知了阿贝尔的死,开始熟悉他在"克雷尔杂志"上的论文,从中发现阿贝尔已经得到了他自己发现的一些结果。

1830 年的 4 月和 6 月,伽罗瓦在费吕萨克男爵(Baron de Ferussac)的《费吕萨克的数学科学通报》(*Bulletin des Sciences Mathématiques*)上发表了几篇短小的论文,该杂志通常只发表成名科学家的作品。此时的编辑是刘维尔的朋友斯图姆,他成了伽罗瓦的一位支持者。同一期中还包含了沙勒(Chasles)、柯西、雅可比和泊松等人的文章。伽罗瓦的这些文章包含了大多数关于方程理论的工作,我们称之为伽罗瓦理论。他同时提交了一份此理论的研究报告给科学院以争夺大奖,但是如我们所知,主管此事的科学院秘书傅里叶病入膏肓,不久之后就去世了。显然他将研究报告带回家阅读,但是它再也没有被归还到科学院。与此同时,伽罗瓦在预科学校通过了第一年关于微积分的考试,但是在八位应试者中仅位列第四。不过,他现在更多地卷入了政治活动中。

正值 1830 年夏天,针对极端保守的查理十世国王统治的抗议逐渐增长并引发暴动,以巴黎街头的骚乱为开端。那时巴黎综合理工学院是共和主义运动的一个中心,那里的学生参加了暴动,但是预科学校的学生却不能走上街头加入他们,因为学校的大门被锁上了。数千人死亡的"光荣三日"结束后,反叛者成为了首都的主人,而失势的国王则弃位逃跑。然而,主要由波拿巴主义者和共和分子组成的反叛者,没能阻止更加温和但仍然保守的奥尔良公爵接过王冠成为路易 - 菲利普

国王。

伽罗瓦这样的共和分子对于结果无比失望。君主制复辟给了他对父亲去世和自身所蒙受屈辱的愤恨一个理想的诉求点。当他回到皇后镇消暑，他的家人讶异于他性格的转变：他成了一名共和主义的煽动者。伽罗瓦现在受到了布朗基(Blanqui)和拉斯帕伊等的影响。他应当是加入了一个叫做“人民之友”的共和激进分子团体。不久该团体被镇压，其中更加激进的成员之后加入了一个共和派的阵营，叫做国民自卫军炮兵部队。这是一个武装组织，不受正规军控制，丝毫不奇怪这一年年底前它被解散了。

与此同时，伽罗瓦被逐出了预科学校，那年夏天它改名为巴黎高等师范学院。开除他的理由是他发表的一篇文章，号召学生们拿起武器。他忙于在他的同学中进行政治煽动，但是他们顶多不冷不热地支持一下。伽罗瓦也曾给《学校公报》(*Gazette des Ecoles*)写信，给出他对巴黎的高中和大学数学教学的意见，大部分建立在他自己的经验上。因为他被开除，他一直收到的补助也终止了。他试图靠教学谋生，给厌烦学习的男生们教授数学。他就自己的理论开设的一门讲座并不成功。他也参加了科学院的讲座。如同我们已经看到的，他们当中一个叫索菲·热尔曼的写信给利布里，后者恰好是这次的讲课者：“他还是继续着他粗鲁无礼的样子，这就是他在听了你最好的讲座之后表现出来的感受。”

国民自卫军被解散后，成员中的19人拒绝交出武器，于1831年4月遭到审判，从而为攻击政府提供了一个绝佳的机会。他们被无罪释放后，在一家叫做勃艮第文但格的酒店组织了一场庆祝晚宴。在场的小说家大仲马(Alexandre Dumas)之后写下“在整个巴黎都很难找到比他们对政府更有敌意的两百号人了”。他们中的一些人非法穿着了国民自卫军的制服，伽罗瓦是其中之一。虽然组织者想要避免招惹警察，当他手拿匕首站起身来向新国王祝酒的时候，事态还是失控了。其他人有样学样，晚会在混乱中结束。大仲马和其他人通过一扇窗户逃走

了。伽罗瓦第二天在他母亲的家里被逮捕,被收押在圣彼拉吉监狱直至6月15日。他因威胁路易－菲利普国王生命的罪名受审,但很快就被假释,理由是他年轻不懂事。假释行为体现了相当的宽大,因为伽罗瓦在审判中完全发泄了他的不满。他承认他还是打算杀掉国王如果"他背叛我们的话",并且加上了他自己的观点,即路易－菲利普"很快就会变成卖国贼,如果他现在还不是的话"。

与此同时,伽罗瓦还在等待关于他方程理论研究报告的消息,这是他投递出去以争夺大奖的工作的一部分。最终,还在监狱的时候,他从科学院听说,推荐人泊松做了汇报:

我们做了所有努力来理解伽罗瓦先生的证明。他的论述既不够清晰,也没有完备到让我们可以判断正误,因此我们在此报告中不能列出它的提纲。作者声称他论文的主要论点,也就是这里的命题,是一个适用于许多其他应用的一般理论的一部分。一个理论的不同部分,通过相互阐明,会比孤立地提出要更好理解,事情往往如此。因此我们希望作者可以完整发表他的作品,这样我们可以形成最终意见。但是就这篇论文现在提交给科学院的状态来说,我们不能建议你们认可它。

这封尚算合理的信件继续敦促伽罗瓦提交一份关于他理论的更完整的描述。伽罗瓦气急败坏地回应了它,并决意与科学院院士们断绝来往。他确实修正了他的作品(原始版本消失了),打算私下发表,但是他将大部分的精力花在了五页的前言上,那是一篇对于科学机构特别是科学院院士的指责,"阿贝尔的死已经让他们的良心备受谴责。"

伽罗瓦于1831年的巴士底日(7月14日)因非法藏匿武器(一支装弹的来复枪、几把手枪,还有匕首)和非法穿着国民自卫军制服再次被捕。当警察来抓他时,他正在街上,走在一个游行队伍的最前头。他在圣彼拉吉监狱被关押到10月份,之后上诉失败,又多判了6个月的刑期。他非常懊丧,有一次因想到他挚爱的父亲,在醉酒后的精神错乱

中试图自杀。7 月 27 日,囚犯们得到机会去参加一次弥撒来纪念那些在“光荣三日”中被杀的人。因为他们很多人都是政治犯,气氛紧张,一场公开骚乱预计将随时爆发。第二天晚上前都没有事情发生,直到街对面住了一位狱卒的一个阁楼上有人开了一枪。有一个人受了伤,不是伽罗瓦,但是显然伽罗瓦被人煽动就所发生的一切责备监狱主管,结果被扔进了地牢。那次骚乱爆发后,步兵团被召来镇压,囚犯们没有抵抗就投降了,无人受伤。

在刑期的最后六周,伽罗瓦获得假释,被转移到一家疗养院,作为应对当时在巴黎流行的霍乱的手段。在这个相对舒适的环境里,伽罗瓦再度开始思考数学,并完成了几篇哲学文章。他于 1832 年 4 月 29 日被释放。令人沮丧的是,关于下一个月,也就是他生命中的最后一个月,我们所知甚少。原本可以提供些线索的警方记录,于 1871 年巴黎公社运动中被毁。5 月 25 日他写信给他在巴黎高等师范学院的密友舍瓦利耶(Chevalier),表达他对生命完全不抱幻想了,并暗示一场失败的恋爱是原因所在。涉及的女人是斯特凡妮·迪莫泰尔(Stéphanie Dumotel),疗养院驻院药剂师的女儿。伽罗瓦从她那里收到的两封信的复本还留存着,尽管它们并不完整,且只有部分可读。一封标注着 5 月 14 日的信写道,“请让我们结束这段关系吧。”另一封提到了别人给她带来的伤痛,这使得伽罗瓦也许感到有义务去守护她。

5 月 30 日这天,伽罗瓦用手枪参与了一场决斗。对于他对手的身份尚有一些疑问,不过似乎是曾经显赫的共和激进分子德艾尔宾维尔(Pescheux d’Herbinville),前一年被审判的 19 人之一。不管怎样,结果是伽罗瓦被射中腹部,躺在那里,数小时无人注意,直到一个路人把他送到了科钦医院。他拒绝了牧师的祷告仪式,第二天死于腹膜炎,年仅 20 岁,去世时他的兄弟阿尔弗雷德(Alfred)在侧。伽罗瓦被埋在蒙帕纳斯某处的一个公墓。为了今天我们看来鸡毛蒜皮的小事决斗,在当时并不罕见。鉴于他所患的偏执狂,对这一致命的决斗,也许没有合理的解释,但是毫无疑问他挚爱父亲的自杀和他的自毁倾向是部分原因。

伽罗瓦相信他将要为某些渺小且可鄙的事情失去生命，而悲剧在于他听任它发生。也许这与他失败的感情经历有关，但是有征兆显示他早已相信自己注定早夭。1831 年他第一次入狱时，他的狱友之一拉斯帕伊，在 7 月 25 日写自监狱的一封信中如下引述伽罗瓦的话："我告诉你吧，我会在一场为了某个地位低下的风骚女人的决斗中死去。为什么？因为她会邀请我为报复另一个危害了她荣誉的人而战。"在决斗前一晚写给朋友们的信中，伽罗瓦再次提到了"不名誉的决斗"。他也写下了"原谅那些杀了我的人，因为他们是出于善意"。

各种想象中的重构围绕着这些奇怪言论展开。最近有一个推测看起来比大多数其他的更合理，就是希望成为一名共和国事业先烈的伽罗瓦，安排了一场假决斗。他计划在决斗中被杀死，这样警察会受到责备，从而引发抗议和骚乱。为了避免这件事被怪罪到他的政治伙伴头上，他留下了一串假信息，倘若他是去参与一场正常决斗的话，他的信件和其他手迹都会难以辨认。如果说这一推测有什么意义的话，那就是他的牺牲毫无价值，因为虽然他死后确实发生了骚乱，但其起因并不相同。

临死前一晚，伽罗瓦给他同样身为数学家的朋友舍瓦利耶写了一封长信，概述了他的发现："在我的一生中，我常常冒险提出一些我并不确定的命题，但是我写在这里的所有内容已经在我的脑子里徘徊将近一年了，它对我来说太重要了，不再误导自己说已经因为公布一些自己都没有完整证明的定理而被怀疑……请公开要求雅可比或者高斯就这些理论的重要性而不是真实性发表意见。在那之后我希望有人会发现整理这些乱七八糟的东西是有用的。"舍瓦利耶与伽罗瓦的弟弟阿尔弗雷德(Alfred)之后抄写了这些数学论文的复本，也许将它们寄给了高斯和雅可比，以及其他什么人，但是没有任何回复记录。

虽然伽罗瓦在信中提到的大部分结果都来自他的知名著作，但他也提到了代数方程和超越函数之间的联系，并且语焉不详地提到"歧点理论"。后者可能涉及代数函数的很多重要性，并且我们会相当确信，无论伽罗瓦发现了什么，之后都被黎曼继承了。至于超越函数，我

们会看到埃尔米特成功地完成了伽罗瓦用椭圆模函数解五次方程的研究,而若尔当则阐明了决定这些函数行为的群论。对数学来说,悲剧在于伽罗瓦20岁去世时,他的工作未能完成。

西尔维斯特(1814—1897)

现在让我们回到大不列颠。维多利亚时代著名数学家的生平吸引了许多数学史专家。西尔维斯特(James Joseph Sylvester)丰富的思想、敏感的个性和跌宕的职业生涯让他成为了一个非常有趣的研究对象。在他有生之年,其科学研究的重要性已经得到了高度认可,而在今天,他同样因为他为美国学校的数学研究打下了基础而被推崇。



1814年9月3日,詹姆斯·约瑟夫·西尔维斯特生于伦敦。他的父亲在伦敦塔附近某处经营葡萄酒和烈酒。他本来姓约瑟夫,但西尔维斯特向他的某一个兄弟学习,加上了那个他广为人知的姓。他曾在伦敦北部读犹太学校,在那里他的数学才能很快得到了认可。14岁时他到新建的伦敦大学学院就读,与其他人一起师从德摩根。然而,几个月之后他便离开了那里。在他的生命轨迹中,有几件事暴露了他的急性子和对挑衅的激烈反应,这就是其中第一件事产生的后果。他改去利物浦的一所学校就读,在那里他远远超出了其他学生,以至于学校专门开了一个班单独教他。他是一个令人不安的学生,总是会问一些难倒他的老师的问题。在他还是学生的时候,就曾经因为解决了一个组合数学方面的实践难题而赢得了500美元的大奖,这个难题曾经困扰了一个叫做美国乐透彩承包商的团体多年。

在利物浦待了不到两年后，西尔维斯特被一位剑桥大学圣约翰学院的前研究员指导了几个月。之后，在1831年，17岁的他被这所学院录取了。他的大学生涯因为疾病而中断，直到6年后他才通过了荣誉学位考试，位列一等荣誉学位中的第二名［这意味着他获得了总成绩第二名，而格林（George Green）获得了第四。一等荣誉学位这个词让我们想起，在剑桥，数学替代了中世纪主导大学课程的亚里士多德逻辑学］。直到1856年，想在剑桥大学毕业还需要正式认可英国教会的39条教规。这个政策影响了天主教徒和不服从英国国教者，就像西尔维斯特这样的犹太教徒。他不打算认同这些，因而失去了获得研究员职位的资格，尽管教职原本可以向他开放。许多年之后，这个考核标准被废止，但这种不公正依然让他感到怨恨："如果我谈到这个话题时比较激动，那是因为它终于让我有了清醒的认识，因为我感受到它对国内外的学术研究、对心智的完全发展，以及对生产力增长造成的不可挽回的损失。在这种压迫性的垄断之下，以及这种有害的、保护了由来已久根深蒂固积习的体制的影响下，我忍受着被机会拒之门外的痛苦。"

在伦敦大学学院，这样的问题没有发生。1838年，西尔维斯特作为自然哲学教授回到那里教书，因而成为了他曾经的老师德摩根的同事。他的任务包括教授一般的科学，特别是物理学。尽管那两三年作为学院的讲师他并不是很成功，但他开始发表有质量的研究，这促成他当选为伦敦皇家学会的会员。从18世纪中期到19世纪中期，该学会衰落成了类似于绅士俱乐部的机构，而不是一个学术团体。但是变革发生了，当选为会员再度成为一种荣耀，尤其是在25岁这样轻的年龄。此时，西尔维斯特还获得了一个都柏林三一学院的大学学位，这个奖励是基于他在剑桥的表现。

1841年，西尔维斯特跨越大西洋，成为了弗吉尼亚大学的数学教授；显然那是美国大学的教职第一次被一个犹太人获取。南北战争前的夏洛茨维尔不是一个太平的地方。就在前一年，一位法学教授被一

个学生枪击。杰斐逊的"学院村" * 里的精英学生给了西尔维斯特热情的欢迎。但是也有一些人因为他犹太人和外国人的双重身份而反对他。导致西尔维斯特在仅仅几个月后突然离去的详情并不明确,但这无疑由他班上的一个学生参与的事件引发。确实有人写了一行极端的文字,而学校并没有给西尔维斯特他认为自己理应获得的支持。

随后关于这次冲突的错误且夸大的报告对于西尔维斯特的声誉和前途造成了很大损害。接下来的两年,他住在纽约,尝试寻求哥伦比亚大学、哈佛大学、南卡罗来纳大学等的教职,却都失败了。他的家人在城中经商,西尔维斯特似乎在这个时期获得了一些有用的实践经验。然而值得注意的是,在美国他一篇研究成果都没有发表,和在伦敦那几年的高产正好相反。他花了好些时间来恢复对自己数学才能的信心。

他被自己试图在美国立业的失败所挫伤,于是在 1843 年末决定回到英国。也许是凭借他在纽约的工作经历,西尔维斯特谋到一个权利与法律生活保险公司的保险统计师和秘书的职位。他写信给自己的朋友约瑟夫·亨利(Joseph Henry):"我最初不过是社团的一个科学顾问,但发生了一些事把整个管理的责任都交到我手中,所以现在按照职业划分,我是一名商人……我处理整个办公室的通信,管理账簿,起草会议记录,总之我转变成了一个新人物,我不得不扮演一年前我完全意想不到的角色。"他定期做评估,并为权利与法律生活保险公司之外的其他一些公司的主管担任审核及科学顾问工作。他还对英国精算协会的创立起到很大作用,在其成立的最初五年担任副主席,之后被选为名誉会员。

由于律师资格在保险精算业是一个优势,西尔维斯特开始学习法律。1846 年,他进入了内殿法学院,四年后取得了律师资格。在学习法律期间,他和数学家凯莱(Arthur Cayley)结下了一段重要而持久的

* 弗吉尼亚大学由美国第三任总统杰斐逊(Thomas Jefferson,1743—1826)创建,他还亲自设计了校园布局,并将它称为"学院村"。——译者

友谊。凯莱是剑桥大学三一学院的前研究员，之后作为出庭律师展开实习。他们是邻居，因为西尔维斯特住在林肯法学院广场26号，权利与法律生活保险公司的办公室，而凯莱就住在林肯法学院里，在2号，那幢石质建筑。尽管他们性格迥异，但还是成为了好友，多年保持着极富成效的合作关系。

19世纪50年代，西尔维斯特建立起他的国际声誉。开始几年，他白天做保险统计工作，晚上做数学研究："我在林肯法学院广场后面的办公室坐了一晚，喝着一瓶葡萄酒来恢复精力。那一晚我发现并发展了整个奇次的二元形式理论，以及就已完成的程度来说，也包括偶次理论。工作完成了，而且完成得非常出色，但是磨人的思考通常都要付出代价——我的脑子像着了火，脚却像掉进一桶寒冰里没有知觉。那一晚我们彻夜无眠。"

西尔维斯特依然在寻求一个教职，1854年，伍利奇的英国皇家陆军炮兵学校空出了一个数学教授职位。西尔维斯特被委任，第二年到职。年薪是500美元，同时还拥有一所官邸及其他福利。学校提供的房子相当宽敞，还带有一座美丽的花园。他时常在那里款待他伦敦的朋友，以及国外的著名数学家们。坐在花园中央那株胡桃树下，他完成了以他的姓氏命名的一些伟大研究。

西尔维斯特在炮兵学校的教学任务并没有繁重到让他没有时间从事其他活动的程度。他一直和凯莱保持着联系，他们经常在靠近刘易舍姆区的一个地方见面，这需要凯莱走出伦敦市中心，而西尔维斯特从伍利奇走过去。他也做私教，其中一个学生正是南丁格尔（Florence Nightingale）。之后几年，在对于女性的教育方面，他展现出了全然超出于时代的观点。国外的学会开始授予他荣誉。在国内，他被英国皇家学会授予皇家勋章。西尔维斯特是1865年成立的伦敦数学学会最早的会员之一，之后成为了它的第二任主席。

经过了把退休年龄设置为55岁的全面改革之后，西尔维斯特被迫从伍利奇退休，起初他似乎拿不到退休金。但这个问题最终被解决了，

他开始把他的雅典娜绅士俱乐部当作他的活动基地。他喜欢唱歌，并上 1870 至 1875 年生活在伦敦的作曲家古诺（Charles Gounod）的课。他向职工会议致词，曾经参选伦敦学务委员会却失败了。就像哈密顿和那时许多受到良好教育的人一样，西尔维斯特阅读了很多经典著作，喜欢用文学和其他典故润色自己的作品。几乎在任何时候，尤其是数学活动暂停时，他会沉浸在诗律的热情中。“他让自己相信，他的作品能够和弥尔顿（Milton）那宏伟壮丽的节奏韵律相提并论，并且他的诗作会和他的数学成果一道让他被世人铭记。”这是他的一位好友的评价。他让编辑和印刷工人伤透了脑筋：“当他的一首诗作将要付印时，一大堆替换和润色的信件、明信片和电报就会涌进来，最终版本似乎永远定不下来。”一位评论家对他的论著《诗体法则》（*The Laws of Verse*）仅有一句评价：“价值主要体现在他的个性上”。比起他的诗，哈密顿的诗可读性要更强。

此时，西尔维斯特也许以为他的学术生涯就要结束了，但事实绝非如此。1876 年，霍普金斯大学在美国巴尔的摩建校。第一任校长吉尔曼（Daniel Coit Gilman）建议道：“聘请一位伟大的数学家和一位卓越的希腊学家。这样的人无论身处民居还是宫殿都能进行教学……其他老师会效仿他们。”一同参与协商的约瑟夫·亨利（Joseph Henry）建议道：“应当付以慷慨的薪水，才能栓牢世界上最好的人选。”基于亨利的推荐，西尔维斯特被任命为数学教授。

于是，他第二次跨越大西洋来到美国担任教职，这次的结果比较让人愉快。在霍普金斯大学他得到了理想的条件。他的日常工作并不繁重，并且有一群能干的助手和有天赋的学生围绕着他。他创建的数学学院相当于美国的第一所数学研究院，从那里走出去的学生又去到别处推动数学研究。尽管最初只有三个学生，其中我们可能比较熟悉的一位是霍尔斯特德（George Bruce Halsted）。在西尔维斯特到来之后不久，他帮助创立了一份新的数学研究期刊，这同样也是美国历史上的第一份。在霍普金斯大学创刊的《美国数学杂志》（*American Journal of*

Mathematics)一直蓬勃发展到今天。起初它主要发表美国大学师生的文章,尤其是霍普金斯大学的,但凯莱和其他欧洲数学家也贡献了作品。

西尔维斯特在霍普金斯大学远比在伍利奇更受重视。总之那是他职业生涯的高峰。到这时,他是一流科学院的外籍准院士,拥有满身学术荣誉,尤其是获得著名的英国皇家学会的科普利奖章。牛津大学授予他民法学博士学位,而他曾经就读的剑桥大学圣约翰学院推选他为名誉研究员。尽管他在美国过得很愉快,回到英国的可能性却开始变得十分诱人,1883 年,一个回国的机会出现了。

直到现在,不同于各个独立学院的是,牛津大学和剑桥大学的学术职位非常少,只有少数几个教授职位。在牛津大学,这包括 1612 年创立的萨维尔天文学和萨维尔几何学教授职位。当时在职的萨维尔几何学教授是亨利·史密斯,著名数论学家,接下来会有对他的简介。史密斯的突然离世使职位出现空缺,经过一番迟疑,西尔维斯特被选定填补这个空缺。1883 年末,西尔维斯特最终离开巴尔的摩去担任在他祖国最有名望的职位之一,这是一个光耀的荣誉——他的光荣榜上突然又多出一块金牌。他被选任为牛津大学新学院的研究员,作为未婚人士可以在那里获得住所。他是牛津大学第一个担任教授职位的犹太教徒,尽管并不是第一个担任学院研究员职位的。西尔维斯特满怀激情地进入了他职业生涯的这一新阶段,他给凯莱的信中写道:"对我来说,牛津大学开始成为一个宜人的住所。我们的大学就像一位亲爱的母亲,张开她的双臂环抱住她的孩子们,对于那些并非由她亲自哺育的孩子,她的爱同样不偏不倚。"这种欢欣愉悦的时光并不长久。几年后,他在给吉尔曼的信中写道:"私下说说:这所大学除了有些品位和一些雅俗共赏的文学之外,就是一个华丽的骗局。"

西尔维斯特被任命为萨维尔教授时快 70 岁了,已经超出了今天英国大学的退休年龄。一开始他的数学才能似乎并没有衰减,但当他在牛津呆了 10 年之后,快要 80 岁的他视力和身体状况都急剧恶化,以致

于他不得不要求学校安排一个副手。那之后西尔维斯特再也没有在牛津居住过,而是多半住在伦敦。有一段时间他完全无法思考数学,这让他十分悲哀沮丧。大约在 1896 年 8 月,他的体力和精神有了些许恢复,于是他又开始工作,完成了他给伦敦数学学会的最后一篇论文。几个月后,正在工作的他掉下了一支笔,在弯腰捡起笔的时候他中风了。他再也没有开口说话,病情一直在恶化,直到 1897 年 3 月 15 日,82 岁的西尔维斯特逝世。

在外貌上,西尔维斯特被描述为低于平均身高,头部巨大,五官端正,有着漂亮的灰色眼睛。他有许多肖像,包括三幅画像,两个奖章头像和各种各样的照片。第一幅是帕滕(George Patten)的油画,由其旁系亲属所拥有,画的是他准备离开弗吉尼亚大学前的坐像。这幅画像据说酷似真人,画上的年轻人身着学士服(来自都柏林的三一学院),一头深色卷发,戴着眼镜,手捧一本书坐在桌边。本书呈现的正是这幅肖像。另一幅画像,专为西尔维斯特呆过的学院所作,作者是埃尔姆斯利(A. E. Elmslie)。尽管这幅画像也被认为和晚年的西尔维斯特颇为相似,但它给人一种疲倦的印象。西尔维斯特本人评价道,当他坐着当模特的时候,光线让他疲惫的双眼几乎无法睁开。

学生时代的他被描述为"善良勇敢,但却过于敏感"。"敏感到令人不快",多年后《牛津学刊》(*Oxford Magazine*)评论道,"他总是要得到来自他人的正面评价和认可才能快乐。""总是与世界作战"是他对自己的评价。他显然有一种为自己树敌和卷入纷争的能力。他在霍普金斯大学的继任者这样概括他的性格:"西尔维斯特脾气急躁且缺乏耐心,但他同时又慷慨、仁慈、心地善良。他总是极其赞赏他人的工作,他的学生只要展现出任何天赋或才能,他都会给予最热烈的认可。他能够被轻微的挑衅气疯,但他并不记仇,他总是乐于尽快忘却争吵的原因。"但这个评价和日记作者赫斯特记述的经历并不一致,赫斯特在 1859 年"发现他极其友好,希望我们可以住在一起,邀请我去伍利奇和他一起住,等等",但不久之后又发现"他对我的每个行为、每一句话曲

解得如此严重,以致于我们根本没法沟通”。

克莱因在他对19世纪数学发展的报告中说道:“表面上看,西尔维斯特活泼、风趣、光彩照人。他是一个出色的演说者,能够用他独特精巧的诗文让自己与众不同;才华横溢、多才多艺的他的确是一个典型的犹太人。”但并不是每个人都同意他是一个出色的演说者,至少不是在每个场合都如此。当西尔维斯特参加了一次伦敦数学学会的早期会议后,德摩根写道:“和西尔维斯特在一起我很愉快。关于他的解说,有些部分比一个精彩的新定理(指牛顿定律)还要非凡卓越:他讲了一节很棒的课,解释得非常清晰。他(在大学学院)和我们一起的时候是个彻底的失败者:不管在教室还是私人展示场所,他都不能集中思考。但是另一个晚上他展现出了适应能力、组织能力,并且用补充细节介绍了比例问题。我很难相信这种转变居然能够发生。”

当他到达霍普金斯大学时,他的技巧一定已经有所提高,不管怎样在那里听他授课的学生已经能较好地去欣赏他特别的教学方式。两个数学学院的成员生动地记录道:

现在我能看见他了,他有白胡子和几绺白发,他的前额布满了智慧的皱纹,他在黑板上飞快地写着数字和公式。但等等,有点不对劲;他停下来,扶额沉思;然后继续工作,标出要点,终于弄明白他的难题。也许是他的数字有误,也许是推理上有疏忽。然而有时难题没有解释清楚,课程剩下的时间却不够了。但下一节课我们会听到关于那道难题的结果的新发现,以及一些他创立的杂志上的文章。如果一本教科书一开始被采用了,看上去要跟着它学,那么在这学期剩下的时间里,那本教科书极有可能注定被遗忘,或者直到班上的学生为了解决那第一道难题,而聆听了从他的头脑宝库中迸现的每一个新想法和新原理之后,才被想起。其他难题很快又会出现,所以没有一本教科书能被用上超过半学期。

他是一个很有趣的人,但是想要记下他说的话几乎不可能,因为他

说得非常快，而且总是在说他当时感兴趣的话题。他从不会停下来去捡一块黑板擦，当他想要把什么东西擦掉的时候他会用自己的手，然后再把手在额头上擦一擦……

他常常在英国过夏天。我记得有个夏天他横渡大西洋时，发现自己落下了关于他当时很感兴趣的主题的几篇论文。他一到利物浦就转到另一艘开往纽约的船上，又返回巴尔的摩去拿他的论文。他很容易忘记自己要上课。他常常在上午过半时来到图书馆，于是我也让自己和他同时呆在图书馆里。他的课在下午一点，快上课的时候，他意识到自己需要做些什么而变得很不自在。他会起身离开房间，我就跟着他穿过街道。他要前往他在市中心的俱乐部。我快步超到他前面，迎面拦住他。然后我问："教授，今天没有课吗？"他的回答永远是："我的天，我给忘了。我们回去吧。"

《西尔维斯特数学论文集》(*The Mathematical Papers of Sylvester*)多达四大卷，总计将近3000页，涵盖近60年的创造性活动。他的一些重要贡献成为它们涉及的论题方面的专著。他常常向《伦敦数学学会杂志》(*Journal of the London Mathematical Society*)投稿。有一次他寄出一篇论文，附上一张纸条说明这是他10年来做出过的最好成果，结果论文被学会秘书退了回来，附上一张纸条说明学会已经发表过这篇论文了。

西尔维斯特最重要的成就是在代数学方面。他和凯莱一起帮助发展了行列式理论及其在非代数领域的应用。他促使代数学家们的注意力从方程论(尽管在这方面他也做出了重要贡献)之类的研究转移到形式论、不变量理论等。他的很多成果被引入到了标准教科书里。尽管之后人们发现凯莱和西尔维斯特的辛勤计算似乎有误，但不变量理论不会消亡，并且持续引起学界尤其是代数几何学者的关注。除了代数学，西尔维斯特做了大量工作的领域还有数论，尤其是分拆理论，以及几何学中的分析。组合学是他一生的兴趣所在。有时他也会回过头

研究他最初有成果发表的数学物理学。

我们不能否认,维多利亚时代英国的大多数数学研究具有封闭狭隘的特性。在欧洲大陆,阿贝尔、柯西、雅可比、庞加莱(Poincaré)、黎曼、魏尔斯特拉斯及其他数学家们改革了这一学科。尽管西尔维斯特和欧洲大陆,尤其是法国的数学家有联系,但他从未大量吸收新观念。一个值得注意的例子是他的分圆函数理论,他曾在一些国外期刊上发表过这一理论,结果只是发现他被库默尔抢先了许多。"很显然",一位评论家指出,"这位博学的教授并没有读过库默尔素理想数理论的基本结果。然而西尔维斯特教授的枕边书——亨利·史密斯的数论报告中就包括了库默尔理论的全部纲要。"

西尔维斯特死后,马克斯·诺特(Max Noether)为《数学纪事》撰写了一篇全面表彰其数学成就的文章,其中提到他注意到了连续函数的概念。这个现代数学的基本概念在其研究中并未发挥什么作用,事实上它在西尔维斯特的整个工作中甚少被提及。诺特接着评价道:

西尔维斯特对自己工作的激情……表明了他的一个固有特性:他的成果和论著中的高度主观性。西尔维斯特一旦专注于一件事情就会完全着魔,以至于这件事情被他看做重中之重,卓越非凡,前途无量。这会极大地激发他的幻想和想象力,甚至超过了他的思考力,这使得他从来都不能支配自己掌控主题的能力,更不用说以井井有条的方式呈现它。

魏尔斯特拉斯(1815—1897)

在高斯和黎曼之后,19 世纪最重要的德国数学家是魏尔斯特拉斯(Karl Theodor Wilhelm Weierstrass)。如果说柯西负责了第一次分析严密化的革命,那么魏尔斯特拉斯就是第二次分析严密化革命的引领者。他的第一段职业生涯充满了艰辛,但他随后就在柏林大学最荣耀的一



段时期负责这里的数学研究。在这里，这位谦虚却又令人敬畏的数学家遇到了索尼娅·柯瓦列夫斯卡娅(Sonya Kovalevskaya)，给予了她最需要的支持，从中我们能够看到在他性格中少为人知的富有同情心的一面。椭圆函数的经典理论主要是由阿贝尔、雅可比和魏尔斯特拉斯三人发展出来，而他们每个人对于这一理论都有着不同的观点。

1815 年 10 月 31 日，魏尔斯特拉斯出生在奥斯滕费尔德，一个靠近明斯特的德国小镇。他比库默尔小五岁，全名是卡尔·特奥多尔·威廉·魏尔斯特拉斯。他的父亲威廉(Wilhelm)是市长的秘书，他的母亲则少有人知。她的名字是西奥多拉[Theodora，娘家姓冯·德尔·福斯特(von der Forst)]，她和丈夫一样，是一个虔诚的自由天主教派信徒。他们结婚 5 个月后，儿子卡尔就出生了。卡尔是老大，另外三个孩子是彼得(Peter)、克拉拉(Klara)和埃莉泽(Elise)。在 1826 年埃莉泽出生后不久，卡尔的母亲便去世了。一年后，他的父亲再婚。他的父亲是一个聪明的、受过教育的人，曾经是一名教师，出了名地自以为是，且不妥协于权威。他希望儿子接受切实可用的教育，并从事行政管理方面的工作，这能保证提供给他一个舒适安逸的生活。

因为他们居住的奥斯滕费尔德没有中学，小卡尔开始在附近的城市明斯特上学。随后，在 14 岁的时候，他转到了帕德博恩的一所文理中学。他的父亲就在这个城市的海关办公室担任助理，之后成为了司库。与法国的情形类似，这所学校一直鼓励学生之间相互竞争，而年轻的魏尔斯特拉斯表现优异。1834 年毕业的时候，他在几乎所有的学科上都获了奖，并以当年最优秀学生之一的身份毕业。这位年轻人进入了波恩大学，一开始希望他在这里学习法律、行政和经济。然而事实证明，他更倾向于学习数学，而不是当时大家都趋之若鹜的那些专业。他

远离了课堂，开始自学数学，练习击剑，享受无忧无虑的学生生活。四年后回到家乡时，他并没有获得学位，但已经建立起了一些在后来发展非常成功的基本数学原理。

他的父亲认为他的学业是失败的，感到极其失望。他觉得自己的儿子最好能够成为一名教师而不是进入仕途。为了获得必要的资格证书，魏尔斯特拉斯 1839 年开始在明斯特神学和哲学学院就读。他已经熟悉了拉普拉斯的《天体力学》，并试图了解雅可比的新椭圆函数理论。在学院中，他受到了数学家古特曼（Christoff Gudermann）的影响。古特曼执教一门关于椭圆函数的课程，魏尔斯特拉斯是这门课程唯一的学生。古特曼对于用幂级数表示椭圆函数这个问题有独特的兴趣，这种分析方法对他学生的职业生涯产生了深远影响。尽管魏尔斯特拉斯只需要一张教师资格证书，他仍说服古特曼在证书考试中添加了这个问题。古特曼读到魏尔斯特拉斯的解答时，留下了十分深刻的印象，于是立刻为他推荐了一个大学职位。不过，这所学院可以做的仅仅是给他一张成为教师的资格证书而已。

1841 年，魏尔斯特拉斯在明斯特的一所文理中学开始了他教学生涯的一年见习期，但次年转到了西普鲁士一个名为德意志克罗内的不起眼地方的同类学校。同年他的第一项数学成果《解析阶乘笔记》（*Notes on Analytical Factorials*，研究现在称为“伽玛函数”的对象）刊登在一份校级出版物上。该杂志狭窄的受众面使人们无法立刻认识到这项工作的重要意义。事实上，10 年后人们才注意到这项工作。期间，魏尔斯特拉斯始终进行着他的研究，经常是在夜间，或是每一段教学之外的时间。

1848 年秋天，他转到了波罗的海边的东普鲁士布劳恩斯贝格皇家天主教文理中学，他在那儿教授数学、物理学、德语、植物学、地理学、历史、体育，甚至书法。那些年里，魏尔斯特拉斯身边既没有可以与他讨论数学的同事，也没有办法接触数学著作，甚至与其他科学家进行学术通信交流于他而言都是不切实际的。他倾注了所有的业余时间进行数

学研究，尤其对阿贝尔的工作产生了浓厚的兴趣。因此，他为学校的期刊写了一篇题为《对阿贝尔积分理论的贡献》(Contributions to the theory of Abelian integrals)的论文。再一次，有限的发行量意味着他的发现没有引起什么重视。借下面的故事我们可以了解到他当时的一些情况：

一天早晨，[布劳恩斯贝格文理中学的]一间教室中一阵嘈杂，调查后发现，本来要讲课的魏尔斯特拉斯仍然没有出现。校长亲自去了魏尔斯特拉斯的住所查看，敲了门后被告知可以进去。外面已经是白天了，可是在漆黑的房间中，魏尔斯特拉斯还坐在一盏微弱的灯光下。他工作了整整一个通宵，甚至没有注意到天已经亮了。当校长提醒他吵吵闹闹的学生们正坐在教室里等着他时，他唯一的回复是，他不会停止手头的工作；他正在完成一个非常重要的发现，而这将引起科学界的极大重视。

此时，他的父亲和继母搬到了威斯特伐利亚的利普施塔特附近的一个村庄里。在1853年暑假拜访他们期间，魏尔斯特拉斯写了另一篇有关阿贝尔函数的论文，这一次，他提交给了“克雷尔杂志”。从学生时代起，他就是这本杂志的忠实读者。1854年，这篇论文发表了，魏尔斯特拉斯几乎是在一夜之间成了名。他成功地解决了有关超椭圆积分的一个重要问题，这位籍籍无名的教师突然间发现自己被公认为了这个时代的第一流分析师之一。很快，柯尼斯堡大学授予了他荣誉博士学位。布劳恩斯贝格文理中学则允许他离开，这样他就可以全职进行科研活动了。在年近四十的岁数里，他的学术生涯才真正开始。他试图在布雷斯劳大学获得一个教席，但没有成功。他收到来自奥地利大学的邀请，但这些学校并不足以吸引他。然而到了1856年，正如我们看到的，库默尔为他创造了一个机会，让他来到柏林大学。

在这一年里，魏尔斯特拉斯被任命为皇家工艺学校教授和柏林大

学的副教授。他还当选为柏林科学院院士。他的早期论文《分析阶乘笔记》的扩充版在“克雷尔杂志”上再版，终于接触到了合适的读者。魏尔斯特拉斯很快在柏林大学承担了繁重的教学工作；前来听他课的人有很多，尽管他的课程起初并不是那么的清晰且有条理。1864年，他晋升为这所大学的正教授，并辞去了其他工作。多年来，他开发出了一套著名的课程系统，他在课程中对自己不断增加的听众阐述了他的理论。这不仅吸引了来自德国的听众，也吸引了很多来自其他更远地方，甚至是来自美洲的听众。他不愿过多动笔写下自己的想法，他学生的作品使他的想法广为流传，而他们的作品无非就是一些盗版。最终在1886年，其中的一本全面阐述魏尔斯特拉斯椭圆函数理论的作品终于在他的准许下出版了。

他研究的中心是幂级数的解析延拓方法。正是魏尔斯特拉斯引入了一致收敛性的概念，在很多方面奠定了现代函数论的基础。除了分析学外，他还给出了高斯关于复数域是实数域唯一可行的代数扩展这一论断的证明。他之后还表现出了对于太阳系长期稳定性的天文学问题的兴趣。然而他不关心几何论证，认为它们缺乏严密性。

不是一个好演讲者却是一个好老师是可能的。1874年，米塔－列夫勒听了魏尔斯特拉斯的课，并给阿贝尔的导师霍尔姆伯写了一封信：

在学术方面，我对在柏林大学逗留的这段日子非常满意。我从来没有发现过一个像这里一样能学到那么多东西的地方。作为德国人，魏尔斯特拉斯和克罗内克有着不同寻常的倾向，他们尽量避免出书。众所周知，魏尔斯特拉斯什么都没有出版，而克罗内克只出版结论而没有证明。在课堂上，他们展示出自己的研究结果。我们今天的数学几乎无法拿出任何可以和魏尔斯特拉斯的函数理论和克罗内克的代数理论相匹敌的东西。魏尔斯特拉斯负责一门函数理论的课程，在两年或三年的周期中，他从最简单、最清晰的基础理念出发，建立了椭圆函数的一套完整理论，以及它们在阿贝尔函数、变分法等等中的应用。他的

体系中最重要的特点是,它完全是分析性的。他极少借助几何方法,当他用的时候,也仅仅是为了示意。这在我看来绝对强过黎曼学派和克莱布什学派。一个人很有可能以黎曼面作为出发点,利用满足已知阿贝尔函数性质的黎曼几何系统,建立起一个完全严密的函数理论。但[黎曼的方法]一方面当涉及恢复高阶超越函数的属性时不适用,另一方面是他把原则上毫不相干的元素引入了函数理论。至于克莱布什的系统,甚至无法表达出最简单的高阶超越函数的特性,这很自然,因为分析总是比几何方法更具一般性。

魏尔斯特拉斯的另一个特点是,他避免了所有关于函数的一般定义和证明。对他来说,一个函数等同于一个幂级数,从这些幂级数可以推导出所有一切。不过有时在我看来,这是一种极端困难的途径,我相信会有人像柯西和刘维尔那样,由一般的但又显然完全严格的定义出发,就能大体上较容易地达到目标。魏尔斯特拉斯和克罗内克的另一个共同特点是,他们的证明非常清晰和精确。出于同样的原因,他们都继承了高斯对于任何可能会攻击他们基本数学思想的形而上学的恐惧,这使他们的推导显得简单自然,迄今为止几乎没有看到过如此系统的达到最高精确度的表达方法。

在米塔-列夫勒同一封信的后半部分写道:“目前有几个年轻、勤奋的数学家,魏尔斯特拉斯对他们寄以最高的希望。在‘我教过的最好学生’列表顶端,他列出了年轻的俄国女贵族索菲·柯瓦列夫斯卡娅(Sophie Kovalevskaya),她刚刚凭借即将在‘克雷尔杂志’发表的两篇论文,被格丁根大学缺席授予博士学位。这两篇论文一篇有关偏微分方程,另一篇则有关对土星光环的研究。”这个了不起的女数学家更广为人知的名字是索尼娅·柯瓦列夫斯卡娅,她的故事会在第六章讲到。

魏尔斯特拉斯的大多数学生把他的理论看作是一种福音。在这种氛围下,怀疑是不允许出现的,并且对于理论的检验也是几乎不可能完

成的，因为他很少引用他自己工作之外的来源。因为魏尔斯特拉斯是这样一个有影响力的老师，他对黎曼理论的反对产生了深远的影响。就像他在1875年写给一位同事的信中讲的那样：

我越是思考函数理论的原则——我不停地这么做着——我越是相信，这必须建立在简单的代数真理之上，因此如果不是建立在简单和基本的代数命题之上，那么此人就走在错误的道路上，（简而言之）他会求助于"超越方法"，无论乍一看起来是多么令人印象深刻的工作，例如，那些借助黎曼发现那么多重要代数函数属性的方法所反映出来的问题。不证自明的是，随便什么方法都必须对研究人员公开，以用于实际的研究过程，这里争论的仅仅是一个系统的理论基础问题。

虽然魏尔斯特拉斯在柏林大学享有相当大的权力，他偶尔也会遇到来自同事们的反对。众所周知，在19世纪70年代末，他与他的同事克罗内克曾经拥有的亲密友谊受到了严重干扰。这部分是因为克罗内克开始强烈反对康托尔（Cantor）的理论，而康托尔可以算是魏尔斯特拉斯的弟子。不久后，克罗内克便不再接受基于归谬法的论证，开始批评起魏尔斯特拉斯的工作。当克罗内克开始声称自己比魏尔斯特拉斯优先研究了 θ 函数的那几个变量，甚至声称魏尔斯特拉斯其实是他的学生时，局面开始失控。魏尔斯特拉斯非常苦恼，并开始认真思考是否前往瑞士。魏尔斯特拉斯认为，犹太数学家如雅可比和克罗内克，在想象力方面与非犹太数学家如黎曼和他自己无法相比。这个话题后来由克莱因接手，毫无疑问，这是那段时期人们普遍持有的观点。

在哲学观点上，魏尔斯特拉斯是康德的信徒。作为一个坚定的和平主义者，他没有参与在19世纪中期造成欧洲大陆动荡的普鲁士对霸权的追求。他奉行的宗教观点是温和与宽容。虽然在天主教的信仰中长大，1873年被任命为柏林大学校长后，他也大力赞扬宗教改革的文化意义。他还表达了自己对于教学的态度：

[教学的]成功……在很大程度上依靠的是老师引导学生不断地做研究。然而这并不是偶然发生的……简单说来，是像下面所说的样子……通过对材料和重点的安排，课堂上老师的讲解应当能使学生以适当的方式领悟到最前沿的思想。用这些方式，精通此道的思考者能从前人的成熟方法中获得进步，并从中产生新的成果或者得到更好的基础。接下来老师应该标明科学上尚未突破的边界，并指出将来可能产生突破的一些方向。大学教师既不应该否定学生通过自己的研究而产生的更深入的见解，也不应该对于自己过去犯下的错误或者令人失望的事情保持缄默。

将此与米塔－列夫勒写给霍尔姆伯的信对比，我们会发现一些有趣的东西：

在授课形式方面，魏尔斯特拉斯的方式是饱受诟病的，甚至是对于最自大的法国数学家来说，像他这么上课，也会被认为是完全不称职的老师。然而，如果在经历了相当大的困难之后，有人能成功地用魏尔斯特拉斯最初的表达形式还原他的课程，那么一切都会显得清晰、简单、有条理。可能是由于缺乏天赋，他的众多学生中很少有人能够彻底理解他的思想。也正是因为如此，对他的工作进行研究的文献仍然那么稀少。然而，这一情况并没有影响他享受到近乎神一般的崇敬。

1885 年，这位大师的 70 岁生日成为了一个公共荣誉活动，也成为了他的弟子和他来自欧洲各地的前学生们聚集的场合。他被授予一枚金质奖章，并得到一本收录了数以百计来自不同国家的他的学生、朋友和同事们照片的纪念册。他的大理石半身像揭开了面纱。此后，他越来越少地公开授课，尽管他喜欢在自己的房子里接待他的几个学生。他们讨论完数学后，他会追忆一下自己的青春时光。在柏林大学的 30

年里,他患上了慢性疾病,有眩晕、支气管炎和静脉炎。1894 年,他坐上了轮椅。1897 年 2 月 19 日,魏尔斯特拉斯在柏林因流感引发的肺炎逝世,享年 81 岁。他终身未婚,被安葬在早于他去世的两个妹妹旁边,他成年后的大部分时间里,都和他这两个妹妹生活在一起。他们抚养了一个名叫弗朗茨(Franz)的男孩,我们并不完全清楚弗朗茨的身世:米塔－列夫勒已经确认,孩子的母亲肯定不是柯瓦列夫斯卡娅。魏尔斯特拉斯的文集有许多卷,但即便如此,他的作品也没有被完全包括进来。他在旅途中习惯随身携带一个大的白木箱,里面是他所有的笔记和论文草稿。1880 年,在他度假的时候,箱子遗失了,再也没有找到。还有一些纸质文档被学生借走了,再也没有被归还。

比起他研究得如此透彻的特殊函数和精心构造的理论,更加引起人们兴趣的是魏尔斯特拉斯强硬严谨的教学方法。他成功地把数学分析建立在一个坚实的基础之上,现在看来这比起他自认为的主要成就更加重要。他对这门学科的系统发展影响了一代又一代数学家,而他们接着将他对于清晰和真实讲解的重要性的信念灌输给他们的学生们。想要了解魏尔斯特拉斯如何改进了他的前任,尤其是柯西的工作方式,我们需要回顾 18 世纪,当时微积分只是一些解决问题的方法的集合。柯西把这变成了一套完整的演绎理论,收敛性和连续性、极限概念下的导数和积分等基本概念都经过了明确定义。他主要用他那新的概念化结构给现有的分析学一个坚实的基础。他的数学里,函数总是伴随着一个公式。

在柯西之后,概念的进一步发展和细化是不可避免的。19 世纪下半叶,概念化结构本身成为了研究对象。与这一现象相关的是一个更加一般的函数概念:原则上,一个函数只是两个数集之间的一个完全任意的对应。特别是不连续函数可以被表示为傅里叶级数的发现(可以追溯到 19 世纪初),对这种变化起了推动作用。

正如我们将看到的,1854 年黎曼在他的特许任教资格论文中,研究了通过傅里叶级数表示的尽可能大的一类函数。这产生了高度不连

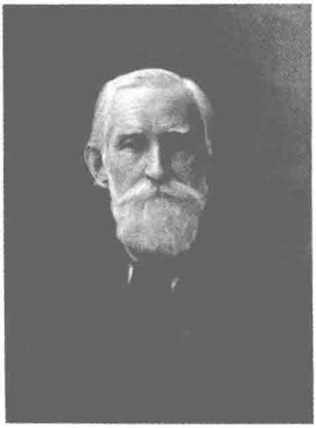
续函数的可积性的问题。黎曼发现,在任何区间内,一个函数可以拥有无穷多个不连续点,并(在柯西-黎曼条件下)仍然是可积的。很明显,这样的高度不连续函数仍然值得研究。研究方向发生了部分改变,从将函数定义为一个或几个特定的公式,到研究更一般意义的函数上。与此同时,实数、函数、级数、收敛性、极限、连续性、可微性、可积性等概念也成为研究的对象。

从这个角度看,柯西的想法是不充分的。例如,柯西显然没有明确区分一致收敛和非一致收敛。而且很明显,他已基本上把实数的一些特性,例如完全性的基本属性,看成是理所当然的了。类似这样的定理:“在封闭的有界区间内连续的一个实值函数可以取得最大值”,其证明归功于魏尔斯特拉斯,就与柯西的研究格格不入。然而,由传统实物几何所表示的更直观的数学方法在柏林大学受到了低估,并产生了副作用。魏尔斯特拉斯为证明有必要采用比柯西认为的必要性更加严密的方法,构造出了各种病态函数,这些函数被像埃尔米特这样的数学家视为过于做作。李(Sophus Lie)认为,魏尔斯特拉斯的分析学的算术基础是对于逻辑敏锐性的一种进步,但还不是数学基础的完备根基。

切比雪夫(1821—1894)

归功于欧拉和其他人的工作,圣彼得堡的数学研究在18世纪成功建立,但是到了19世纪中期需要得到振兴。切比雪夫(Pafnuty Lvovich Chebyshev)主导完成了这一任务,并创立了直到20世纪都在俄国占主导地位的圣彼得堡学派。不幸的是,在这一重要历史时期中,对其他重要的俄国数学家的记录非常少,但切比雪夫的信息则丰富得多。

帕夫努季·利沃维奇·切比雪夫1821年5月14日生于莫斯科南部卡卢加地区,一个靠近博罗夫斯克的村庄里。他有一条因病萎缩的腿,这让他或多或少有点跛脚,而且他还有点语言障碍。他的父亲列



夫·帕夫洛维奇(Lev Pavlovich)是一个参加过拿破仑战争的退役陆军士官。他的母亲伊万诺夫娜·波兹尼亚科娃(Ivanovna Pozniakova)还有另外八个孩子。在帕夫努季的弟弟中,弗拉基米尔·利沃维奇(Vladimir Lvovich)是较杰出的一个,他在陆军做过将官,在圣彼得堡炮兵学院做过教授。在帕夫努季的幼儿时代,他们一家生活在一个小乡村庄园中。他母亲教会他读写,他的算术和法语则由一个在家庭中担任女管家的年轻女性亲戚教授。在他 11 岁的时候,他们一家搬到了莫斯科,在那里他进入学校继续接受教育。他的数学是由当时最好的导师之一波戈列利斯基(Pogorelski)教授的。

1837 年,年轻的切比雪夫进入莫斯科大学物理数学系,那里的数学教育由名师执掌。担任切比雪夫首席导师的是布拉什曼(N. D. Brashman);后来他成为莫斯科数学学会的主要组织者和第一任会长,而切比雪夫成为其首批成员之一。在大学的第一年年末,切比雪夫在一个有奖竞赛中得到一枚奖章,作品是他写的一篇关于方程根的计算的论文。他提出了用逐次逼近的方式得到近似解的原创方法,这种数学方法后来成为他的一项专长。

1840 年,饥荒影响了俄国相当大的地区。切比雪夫的父母因此在经济上受到了沉重打击,不再能够为他的大学生活提供多少经费支持。不管怎样,在度过了可怜的最后一年后,他于 1841 年毕业。在研究方面,他把注意力转向了概率论,这成为他另一个终身的兴趣,并在 1846 年他的硕士论文中给出了对该理论基本命题的一个严格演绎。他的特点是倾向于使用最简单的方法,并且当问题的精确解无法得到时,他会寻求近似解,并且小心地附上它们可能的误差范围的精确估计。

当切比雪夫似乎在莫斯科无望获得学术职位时,1847 年一个机会

出现在首都圣彼得堡。为了取得教师资格，他向莫斯科大学提交了一篇题为《论用对数积分》(On integration with the help of logarithms)的论文，其主要结果直到1853年才被发表。切比雪夫被任命为圣彼得堡大学的讲师，在那里他度过了接下来的35年。最初他讲授高等代数与数论，但多年来他涉及了广泛的主题。李雅普诺夫(A. M. Lyapunov)是听过他一些课程的人之一，他说：

> 他的课程并不多，而且他并不考虑传授知识的数量；他更希望说清楚一些他谈到的问题的最重要方面。这些课程活泼又有吸引性；对特定问题或科学方法的重要性的新奇评论非常丰富。有时，他会随便讲一些与他曾经仔细考虑过的具体实例相关的评论，但在场的学生们总是会记住它。因此，上他的课非常刺激；学生们在每堂课中总能得到些新的、重要的知识；他传授给学生们更广泛的视野和不寻常的观点。

圣彼得堡科学院的欧拉文献档案中包含大量的材料。在俄国，人们对他在数论方面的工作特别感兴趣，并不是所有这方面的工作都已发表。一个新的更完整的版本正在由切比雪夫的助手布尼亚科夫斯基(V. J. Bunyakovski)筹备。成果是一个两卷本，在1849出版，其中不仅包括所有欧拉已发表的关于该主题的研究，还有很多未发表过的资料。布尼亚科夫斯基和切比雪夫撰写了关于这些内容的系统回顾。该项目把切比雪夫自己的研究兴趣转向了数论。1849年，他开始以同余理论为主题准备他的博士论文，他在未来几年内的研究以这个问题的两篇经典研究报告达到顶点。虽然受到欧拉影响，但这些论文中还是包含了很多问题的原创工作，如素数分布。后来切比雪夫自己在很大程度上放弃了对数论的研究，但其他俄国数学家继续了他已开始的脚步。

在这个时期，切比雪夫父母的财政处于混乱状态，他靠他微薄的学校工资生存。后来，当他的情况好一点的时候，他宁愿把多余的收入花在旅行上，这种在他早年生活中向往的经济支出方式延续了一生。直

到这一刻,切比雪夫还没有离开过俄国,尽管他的数论工作已经使他享有国际声誉。然而在1852年夏天,他被安排了一个正式的、持续6个月的任务,去访问柏林、伦敦和巴黎。这个任务的主要目的是考察工厂和车间,以了解蒸汽机和其他机器的使用。例如在法国,他参观了巴黎国立工艺博物馆,巴黎到圣日耳曼之间的铁路,洛林的矿山和铸造厂,里尔的风车,以及沙泰勒罗的兵工厂。

然而,在白天学习新工艺之余,他在晚上寻找机会和他访问之地的最前沿数学家见面。比如在柏林,他花了相当长的时间和狄利克雷在一起,在伦敦他拜访凯莱和西尔维斯特,在巴黎他受到刘维尔的盛情接待,并将他介绍给其他法国数学家。他后来回忆说:"我们有一次在巴黎小坐,我们三个:埃尔米特、西尔维斯特和我自己。埃尔米特,法国领先的数学家;西尔维斯特,英国领先的数学家;还有我自己。"切比雪夫很快就被认为是俄国领先的数学家。像他那个年代的许多受过良好教育的俄国人一样,他法语流利;他用法语思考他的工作,之后才把它翻译成俄语。他频繁地回到巴黎,并和法国的数学家们,尤其是刘维尔,成为了终身的朋友。

1854年切比雪夫被选入圣彼得堡科学院,最初只是一个助理院士,但很快得到晋升,在五年内成为院士。同样地,在大学中他被任命为数学系副教授,几年后即升任正教授。他把注意力转向了概率论,把它看作命题需要严格证明的纯粹数学学科。他在该理论的两个主要课题上都取得了长足的进步:大数律和中心极限定理。在同一时间,他开始对机械工程感兴趣,并在某几年开设了一门应用力学课程,先是开在大学中,后来开在附近的亚力山大学园。这个新的兴趣让他开始考虑一系列新的数学问题,他早期的逼近论工作就与此相关。他随后发表的关于新技术中的数学的先驱性论文,标志着一个他的余生都与之相连的伟大周期的开端。虽然这项工作大部分都与应用相关,但它也有重要的理论成果。

作为一个院士,切比雪夫日益被要求对政府和军队提出科学上的

建议。他被任命为教育部科学委员会的一员，在那里他致力于对中学数学、物理学和天文学教学的改进工作。他的简洁而严肃的评论对科学委员会要求评估的学校教科书的作者十分有益。他被任命的另一个委员会与炮兵相关；在那里他能够帮助解决一些弹道方面的问题。实际问题对他产生了强烈的吸引力。他自己发明了几台机器，包括一台计算机器。在付出了巨大的个人努力后，这些机器在 19 世纪 70 年代后期被构造出来；在莫斯科和巴黎的博物馆里可以看到它们的模型。他积极参与各种科学学会，参加科学会议；他还提名了一批国外杰出的数学家来参选圣彼得堡科学院。

下面关于切比雪夫作为一个老师的描述来自他曾经的学生马尔可夫(A. M. Markov)和索宁(N. Y. Sonine)：

切比雪夫作为讲师是迂腐严谨的。他几乎从未误课，从不迟到一分钟，在到时间后也从未拖堂过一分钟。他以在一个句子说到一半时停顿下来而知名。如果他还没有讲完一个论点，他会在下一节课完成它，即使那节课已经与上一节没有什么直接关系。他在开始每一个计算之前总要先解释它的目的，并写下主要步骤，即使它并不复杂。他几乎总是沉默着做他的计算，学生们更加需要用眼睛而不是用耳朵来跟上他。他的计算非常快，而且非常详细，因此很容易跟随着他的所有步骤。在讲述中，切比雪夫经常会脱离系统的进展。他对他课堂上的问题处理，以及它们与许多其他数学问题的关系哪个更重要方面有自己的看法。他还会在课堂上汇报他和其他数学家关于这些问题有过的讨论。这些离题的讨论让课堂氛围变得活跃，放宽了听课者的注意力，并激发了他们对该学科的兴趣。

1882 夏天，在为大学工作了 35 年后，切比雪夫从他的教授职位上退休。他以对巴黎的再一次造访开始了他的退休生活，在那里遇到他的李描述他为“像年轻人一样活力四射的非凡的老绅士”。在他返回

圣彼得堡,继续他的院士工作时,切比雪夫特别注意鼓励年轻科学家,举办每周一次的"家庭聚会",对新的发展进行讨论:"在每周一次的一个固定时间,他的家门为所有那些希望告诉伟大数学家他们的研究结果,并领受一些见解的人开放。很少有人没有得到新想法或者没有被他的研究工作激励而离开的。"到此时,切比雪夫已经从俄国的大学和其他机构获得了无数的学术荣誉和其他荣誉,还是许多外国科学院的名誉院士。然而,在迫切需要改革的时候,他并没有试图利用这些声誉来推动改革。柯瓦列夫斯卡娅想在自己的祖国开展职业生涯时,发现他虽然友好,但无法克服根深蒂固的偏见。

1893 年,切比雪夫又一次访问了巴黎,这也是他最后的出访。他因心脏病发作于 1894 年 12 月 8 日在圣彼得堡逝世,享年 83 岁。之后不久出版了他作品集的第一版;其他的随后出版。他的一些更重要的作品已经被翻译成其他语言。

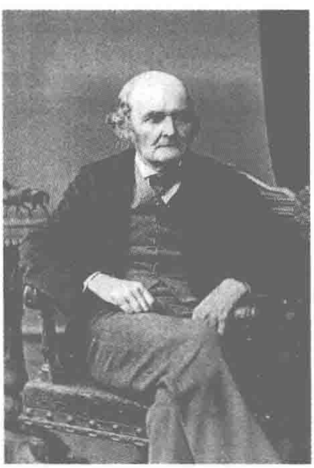
切比雪夫是第一个因为数学工作赢得了国际声誉的俄国人。他的重要性不仅在于他个人做出的发现,而且在于他对圣彼得堡数学学派的创立,这个称谓是源于它的大部分成员都在圣彼得堡大学受教育,并留在那里或者到圣彼得堡科学院工作。当然,切比雪夫的工作建立在前人的基础上,但他才是那个在整个 19 世纪后半叶承担领导作用并提供灵感的人。他影响了圣彼得堡大学及其他俄国大学的数学教学走向,在这些大学中,他以前的学生和弟子们都发挥了影响力。从 19 世纪末到 20 世纪初,圣彼得堡学派不仅是俄国最重要的数学研究团体,也是世界上最重要的之一。后来它被莫斯科学派代替,如我们将在本书最后一章亚历山德罗夫(Aleksandrov)和柯尔莫戈洛夫(Kolmogorov)的部分中描述的。

在专业上,切比雪夫和欧拉有很多共同点,尽管他们在性格上有很大的差异,而且圣彼得堡学派是依照欧拉式的传统建立的。理论与实践的结合是数学向前发展的动力,他断言:

数学科学自久远以来就引起了特别的关注;因为它们对工业和艺术的影响,它们在今天还会吸引更多的关注。理论和实践的统一带来了最有益的结果,而且并非只有实践的一面会获得收益;科学在其影响下,随着新的研究对象,以及熟悉对象的研究新方向的发现而发展。尽管由于过去3个世纪里杰出几何学家的努力,数学科学获得了伟大进步,实践中仍出现了很多缺陷。新的问题出现,需要新的方法。

凯莱(1821—1895)

分析学会是一个由尝试让剑桥数学现代化的剑桥大学毕业生们组成的非正式社团。例如,巴贝奇(Babbage)和赫歇尔就共同将拉克鲁瓦的微积分教科书译成了英文。不久之后,在一定程度上愿意接受欧洲大陆影响的数学家们开始在不列颠出现。在前文中我们讨论过的西尔维斯特就是其中之一,我们将要用另外一位剑桥大学数学家阿瑟·凯莱(Arthur Cayley)的人物简介来结束这一章。凯莱比西尔维斯特小七岁,却和西尔维斯特关系非常密切。



亨利·凯莱(Henry Cayley)曾是19世纪早期在圣彼得堡工作的一位英国商人。他和他的妻子玛丽·安东尼娅[Marie Antonia,娘家姓道蒂(Doughty)]在一次出访中回到英国,来到了伦敦西南的泰晤士河畔里士满。在这段时期内,1821年8月16日,他们的儿子阿瑟在这里出生了。因此阿瑟只比切比雪夫小几个月,而阿瑟的妈妈据说有部分俄国血统。8年多后,他的父亲从原来的职业退休,带着包括五个孩子的一家人回到英国居住,并在临近格林尼治的布莱克希斯安置了下来。阿瑟14岁就进入了伦敦大学国王学院的高中部,比正常情况早了两年。他的父亲期望儿子能

够追随自己的步伐，成为一个“驻俄商人”，不过最终被说服，年轻人应该要读大学。

年轻的凯莱1838年10月进入了剑桥大学三一学院学习，他一有机会就获得了学院的奖学金。他学习的是当时的核心学科即数学，对他进行指导的是霍普金斯(William Hopkins)，这位有远见的指导老师鼓励他的学生们研读一流欧洲大陆数学家们的著作。在当时，牛津大学和剑桥大学的教学工作大部分都是由这样的指导老师完成的，一般来说他们不一定是学院的研究员，而是一批擅长训练学生怎样在大学考试中取得更好成绩的人。在竞争激烈的荣誉学位考试中，凯莱在他那一年的应试者中拔得头筹，1842年成为了剑桥大学数学学位考试第一等中的第一名。他再接再厉，在另外一场竞争非常激烈的考试中，又赢得了梦寐以求的史密斯奖。

一位凯莱同时代的人回忆道：“作为本科生的凯莱被人们认为仅仅是一个数学家。这对于凯莱来说并不公平，实际上，他是一个多才多艺的人，涉猎范围甚至包括一些与科学完全无关的学科。比如说，他熟悉所有的当代小说，这在剑桥大学是一件不寻常的事情，因为阅读小说并不是那里的人们流行的偏好。”凯莱最喜欢的作者是奥斯汀(Jane Austen)和斯科特爵士(Sir Walter Scott)。除了阅读，他还非常喜爱建筑和绘画。他喜欢旅行，还曾经为他所到之处的著名建筑画过素描。他在攀登阿尔卑斯山的过程中玩的很开心，而且还是登山俱乐部的早期成员之一。

凯莱的学术成就让他成为三一学院的小研究员，他也是整个19世纪最年轻的研究员。尽管一般来说，作为研究员会被多少分派一些教学工作，但是凯莱除了参与一些高级进修和研究工作外，并没有承担其他职责，这种情况持续了7年。对于凯莱来说，这完全自由的几年成了他最为硕果累累的几年。单单在1845年，他就发表了不少于13篇论文，与多个数学主题相关。当他的研究员任期结束时，他决定要为进入法律界做准备——这是因为在英国，即使到现在，出庭律师都在一些特

定种类的法律工作上享有特权。而想要成为一名出庭律师,必须要进入四大法学院之一学习,还要在一位有经验的从业者手下以学徒身份进行一些实际法律工作。1846 年 4 月,24 岁的凯莱被林肯法学院接收,成为了当时享有盛名的权益律师克里斯蒂(J. H. Christie)的学生。

凯莱来到那幢石质建筑,递上他的名片,对方接收后他要求成为那里的学生。克里斯蒂询问他是否有推荐信,回答是:没有。又问他上过大学吗?回答是:上过。克里斯蒂,这个在他的课堂里很少有空座位的老师,曾经说到他对这个回答问题简短而粗鲁的申请人并不喜欢。不过,既然这个申请人上过大学,那么可能他值得被继续追问。克里斯蒂就是这么做的,问了一系列单独的问题后,他得知凯莱是剑桥大学毕业的,就读于三一学院,已经获得了学位,成绩优异,数学成绩突出,获得的是一等荣誉学位,而且是其中的第一名。

对于克里斯蒂来说这就已经足够了。在剑桥获得荣誉学位考试第一名和史密斯奖,能为律师事务所增添荣誉。作为克里斯蒂课堂里的一员,凯莱获得了起草法律文件的经历。一位同学回忆起凯莱,对他害羞的性格评论到:“他有着我所知道的人里面最为单纯的思想。课堂里的玩笑和打闹对于他来说都是些有趣的新鲜事。他静静地听同学们谈话,并不太多参与进去,但是脸上却洋溢着愉悦的表情。他满足于将自己的时间孜孜不倦地奉献给手头的工作,虽然我怀疑那些工作并不总是符合他的口味。”

在这段时间,凯莱和西尔维斯特成为了朋友。他们两个性格大相径庭。凯莱有耐心且性情温和,而西尔维斯特则急躁且充满激情。凯莱对于完成数学论文和法律文件同样用心,而西尔维斯特写过的论文则总是要附上对证明的改动及更正。凯莱博览同时代的数学成果,而西尔维斯特只读与他自己的研究有直接关系的文章。凯莱是一个非常通情达理的人,而西尔维斯特则对世俗之事毫不关心。凯莱谦逊且内

敛,西尔维斯特勇敢且自大。在这段时间凯莱所结交的数学家朋友里,还有逻辑学家布尔(Geerge Boole),他引导凯莱投入对不变量的研究;另外还有几何学家萨蒙(George Salmon),他俩后来一起共事。

凯莱1849年取得律师资格,从此成为一名合格的出庭律师。他搬去林肯法学院的一个宁静的办公室,当他没有忙于法律事务时,他能在那里继续进行他的数学研究。他向英国皇家学会提交了一篇论文,并且在西尔维斯特和其他人的提名下当选为会员,这件事情足以确保他的成功。

在这以后,凯莱经历了他数学职业生涯中最为多产的一段时间。虽然凯莱和西尔维斯特从来没有联名发表过论文,但他俩的名字由于对不变量理论的共同兴趣而相连,凯莱在这个数学分支里投入了大量的时间。他们的基本想法是研究在代数表达式中的线性变换带来的影响,比如二元型,他们把这称为"代数齐式"。在形式上保持不变的东西叫做不变量。虽然凯莱主要将他的研究成果发表在《皇家学会哲学会刊》上,但他偶尔也在欧洲大陆的杂志上发表文章,比如"克雷尔杂志"及"刘维尔杂志"。他的部分工作在欧洲大陆开始被人知晓,而且影响了欧洲大陆的数学家们,尤其是克莱因。

数年内,凯莱继续一边做他的职业工作,一边进行数学研究。十年过去了,他被皇家学会的多个委员会聘用,其中包括顾问委员会,他还积极参与皇家天文学学会的活动。然而,比起继续从事他的法律工作,他日益倾向于数学研究。他父亲1850年去世后,他承担了照顾他寡居的母亲和两个妹妹的义务,而他的两个弟弟在这件事情上帮不上什么忙。于是凯莱开始申请一些学术职位,为了增大他申请成功的概率,他开始发表越来越多的文章。合适的职位数量并不多。他申请了阿伯丁大学的教授职位,但是被麦克斯韦赢得。剑桥大学的另一个大学教授职位——朗兹教授空了出来,但凯莱又一次竞争失败。终于,一个新的教授职位——萨德勒教授在剑桥大学被创立,凯莱在1863年获得任命。他一直都保留着这个职务,直到32年后去世。

1863 年 9 月,凯莱和苏珊·莫林(Susan Moline)结婚,她是格林尼治的罗伯特·莫林(Robert Moline)的女儿。苏珊后来为凯莱生下两个孩子:玛丽(Mary)和亨利(Henry)。一家人定居在了剑桥。凯莱并没有教学经历,不过他的教学任务一开始仅仅是一年上一门课,他一般选择在秋季学期上课。后来,随着章程的改变,他又在春季学期上另外一门课。多年里,他从来不用粉笔和黑板,这可能是因为听课的学生非常少。作为替代,他将他的讲课稿写在纸上并带去,上面还做了注解。他拿着手写的讲课稿,让自己能看到。他的听众围坐在同一张桌子边,感觉有点混乱。凯莱大部分时候都在课堂上讲他最新的研究,不过他并不被认为是一个好老师。一个大学生评价道:"看着凯莱解决一个问题,是一种有趣、有价值且有教育意义的体验。他看起来并没有费心选择最好的方法,而是直接选择他想到的第一个方法。接下来就引出了一系列分析表达式,它们看起来都复杂难懂得令人绝望。然而凯莱看起来从来不会有一丝困惑,而是从容地进行着演算,在几行里就将原本完全不成形的一片混乱符号转换成美丽的对称表达式。"

看一眼凯莱在家的样子,会让我们回忆起那次皮尔森(Karl Pearson,统计学的先驱)为竞争史密斯奖而在剑桥大学凯莱的屋子里参加一个特殊考试的情景:

凯莱说的第一句话就是"把你们的长外套脱掉吧,先生们,没有了它你们做题会轻松不少。"凯莱没有在午饭时间出现。三明治、饼干及其他小茶点都放在一个托盘里,同时还配了一瓶上等葡萄酒。凯莱没有吝啬他的藏酒。品尝了一杯葡萄酒之后,我试着说服其他应试者也尝试一下。之后我们继续考试,整个过程中我一直能感受到凯莱的酒,其他人也安慰自己是在巨大的考试压力下做了该做的事。凯莱明显不认为优等的葡萄酒与研究不变式及高等代数是相互矛盾的。

深知凯莱的日记作者赫斯特这样形容他:"他的脑袋长得真棒,不

仅圆，而且类似一个椭球体，最大直径平行于双眼，或者更确切地说是联结两个耳朵的轴线。他从不坐直，而只是坐在椅子的边缘，一只手肘撑着椅子，另一只手扶着椅背。他还是一个目光敏锐、卓越出众的人，天生温和，同时又羞怯、谦逊、沉默寡言。他常常在说话的时候闭上眼，仿佛在读一本看不见的书，他的演讲也非常棒，以至于听众得动足脑筋才能跟上他。"

因为凯莱经常忙于其他工作，他自己只写了一本专著，即《椭圆函数论》(*A Treatise on Elliptic Functions*)，出版于1876年。那时大部分关于椭圆函数的著作都是法文或者德文的，凯莱的著作让不熟悉这些语言的数学家们能够更加方便地理解和接触这个理论。凯莱自己经常将论文写成法文，并且发表在法国的杂志上。他还精通德语、意大利语及一些古典语言。赫斯特提及了刘维尔的评价："我很高兴听说了刘维尔对于凯莱作品的评价。他承认凯莱和西尔维斯特的能力，但是反对他们固有的晦涩。他认为他们两个在这方面有几分像是柯西的弟子，在他们眼里准确和清晰都是令人厌烦的。他们不会穿过那些已经征服的版图，向着困难用坚定稳健的步伐前进，而是跳过难题，腾空翻过去。这么做很可能会让他们迅速有效地看到自己的目标，但是其他人则坚持脚踏实地以便看得更清。"

凯莱发表的文章达到了800多篇，即使其中有许多篇只是简短的笔记，这个数字仍然是让人惊叹的。随着我们翻阅他的13本作品集，我们很难不产生一丝失望感。偶尔会找到一些珍宝，比如发现三次曲面上存在27条直线。其中有一些想法事后看来孕育着一些激动人心的可能性，然而他却没有深究。他引入了抽象群概念以与置换群相对，却把它留给伯恩赛德(Burnside)和若尔当来做进一步的研究。他写过行列式和矩阵的相关文章，却最终由弗罗贝尼乌斯(Frobenius)展示了它们的作用。他一次又一次回到不变量理论，在一页又一页纸上写下复杂的演算。尤其是在他早年，他不时会写一些理论动力学和天体力学的文章，但他并没有投入这些在理论物理领域发生的令人激动的新

发展。

和他的朋友西尔维斯特一样,凯莱对于女性的教育特别感兴趣,特别是担任了后来成为纽纳姆学院的校委会主席时。女性被允许进入剑桥大学且成为其成员,部分是受了凯莱的影响,虽然直到1948年她们才被允许获得学位。凯莱也曾经教过来自格顿学院的学生,这是剑桥大学的第一个女性学院。在这里插几句其中一位女性的职业生涯概要的题外话,这能够帮助我们理解她们当时所面临的困难。

1876年,当18岁的夏洛特·安加斯·斯科特(Charlotte Angas Scott)进入格顿学院的时候,这个学院已经建立7年了。在剑桥大学,女性只有在教师的同意下才能听课,甚至为了防止她们看到黑板,那时候只允许她们坐在屏幕后方,而且只有在特殊许可下才可以参加考试。1880年斯科特在剑桥评议员会堂参加考试,在听闻她的成绩排名第八时,人们对她赞不绝口。那天的晚宴充斥着喝彩与掌声,她被授予了桂冠。她的成功在英国女性的高等教育问题上是个突破。学校表示未来将同意女性和男性一样参加考试,不再需要特殊许可。她上凯莱的课,在他的指导下撰写论文,1885年获得博士学位前她被任命为格顿学院的临时讲师。在剑桥大学,一名女性无论多么优秀都不能获得学位。但伦敦大学不一样,斯科特通过层层考试,1882年拿到了伦敦大学理科学士学位,3年后拿到了理学博士学位。

1882年,在西尔维斯特的邀请下,凯莱作为访问学者访问了美国霍普金斯大学。他在那里停留了5个月,但除此之外,他和美国似乎并没有建立起其他关联,最多间接性地与他以前的学生夏洛特·斯科特有些联系。夏洛特1885年在伦敦大学获得了博士学位,完全有资格胜任学术职位。大西洋另一边的布林茅尔学院紧挨着费城,它刚刚开始为女性提供本科和研究生教育。由于类似的大学职位在欧洲事实上不存在,夏洛特选择去布林茅尔学院,成为8位奠基人中唯一的女性数学家。后来她就一直留在这所学校,继续她的职业生涯。一开始,她只有4个真正的数学专业学生,3个本科生和1个研究生。但渐渐地她的学

生多了起来,到了第9年她已经有了6个新的数学专业学生,2个本科生和4个研究生,这其中包括了她的第一批2个成功的博士生。她和布林茅尔学院院长的关系只限于礼节上,并且相当冷漠。有一次她写信给这位院长:"我目前感到深深的困扰和失望,因为我发现你主张通过降低要求来使智力工作适合于女性,以及在女性大学中使用相对于男性大学更低的标准。"

剑桥大学的纯粹数学家和法国、德国的顶尖数学家之间的关系依然有许多耐人寻味之处。然而凯莱的成就在欧洲大陆尤其是德国受到高度尊敬。埃尔米特认为他不亚于柯西,因为他有很强的研究能力和清晰、简洁的分析能力。也有人认为他不亚于欧拉。但是正如自然哲学家泰特所说:"一个如此杰出的人将他的能力花在完全无用的问题上是不是太可惜了?"后来,当哈代(G. H. Hardy)被问及他是否认为凯莱是一位伟大的数学家时,他只是瞪了瞪眼。

凯莱关于法律事项的建议被自己学院采纳后,1872年当选三一学院的荣誉研究员。他在学校评议委员会任职长达16年,在学校事务中他的意见也备受尊重。他曾经一度主持伦敦数学学会,另一段时间还主持过英国科学促进协会。家乡及海外的大学纷纷授予他荣誉学位,随之同来的还有其他学术荣誉,特别值得关注的首先是英国皇家学会的皇室勋章,然后是科普利奖章。1888年,三一学院雷恩图书馆放置了一座他的半身像。然而,一位当时的学生将剑桥大学的气氛形容为令人窒息,并且单独批评了凯莱:"他就像佛陀坐在自己的宝座上一样坐在那里,给剑桥大学的数学学院施加可怕的压力。"不过从那时开始,凯莱的身体每况愈下,并在1895年1月26日逝世,享年73岁。

第五章

从埃尔米特到李

接下来出场的6位数学名家生于1822—1842年的21年间。其中3位来自德国，另3位分别来自法国、爱尔兰和挪威。

埃尔米特（1822—1901）

在柯西去世后，夏尔·埃尔米特（Charles Hermite）被认为是法国的领头数学家。据说，正是他从高斯和柯西手里毫无争议地接过了高等算术和分析学的权杖。他独自洞悉到魏尔斯特拉斯和黎曼关于阿贝尔函数、克罗内克和史密斯关于数论与椭圆函数之间的神秘关系等工作的深度。据说博雷尔（Emile Borel）曾评论说，没有一个人能像埃尔米特那样让人们如此深刻地喜爱数学。因为他的生涯相对平淡，他的故事将是本书介绍的数学家中篇幅最短的几篇之一。

费迪南·埃尔米特（Ferdinand Hermite）与马德莱娜·埃尔米特（Madeleine Hermite）夫妇的儿子夏尔出生于1822年12月24日。他的祖先是法德双裔，而埃尔米特出生地所在的迪约兹村，位于洛林的摩泽尔地区，法国和德国曾一度同时宣称对该地的所有权。虽然如此，这个



未来的数学家，七个孩子中的小六，一直视自己为法国人，并成了法国数学界的顶梁柱之一。他的父亲有强烈的艺术倾向，年轻时曾学习工程，在迪约兹做布商。他的生意源于他妻子的家庭，后来又托付给了他妻子，这样他可以全身心发展他的艺术天分。1829 年左右，他们将生意搬到了南希。

这对父母好像不是特别关注孩子们的教育，所有的孩子都在南希的中学开始学习。不过，夏尔又到巴黎继续学习，先是在亨利四世学院——拿破仑学院的前身，1840—1841 年间，又在著名的路易大帝学校学习，在那里教他数学的是里夏尔，15 年前曾指导伽罗瓦研究的同一位老师。里夏尔称他是"小拉格朗日"，因为年轻的埃尔米特花了许多功夫研读拉格朗日的《论数值方程的解》这样的经典著作。在不了解鲁菲尼和阿贝尔工作的情况下，他尝试证明一般的五次方程无法用根式求解。埃尔米特的头两篇研究论文可溯源到他的中学时代，发表在《新数学年刊》(*Nouvelles Annales de Mathématiques*)上。

1842 年，埃尔米特被巴黎综合理工学院录取，在全国的入学考试者中，他由于对几何学的轻视而只排名第 68 位。经过第一年的学习后，他被拒绝升学，因为他的右脚有先天性缺陷，所以他需要使用拐杖。在有影响力的人物的介入下，校方的这一决定被撤销，但附加了一些在埃尔米特看来无法接受的条件。结果是，毕业后，埃尔米特没有从综合理工学院进入到某个应用机构，而是安心于从事教学生涯，并在 1847 年参加了资格考试。终其一生，埃尔米特都讨厌考试，他宁愿轻松地掌握知识，而不是顶住压力学习。

正是通过他在椭圆函数方面的工作，埃尔米特确立了他作为领头分析学家的地位。在 19 世纪 30 年代早期，雅可比就开始研究由超椭

圆积分得到的反函数,但这些新的超越函数的关键性质仍然未知。在其诸多成就中,埃尔米特将阿贝尔关于椭圆函数辐角除法定理推广到了超椭圆函数。1843 年初,他将自己所取得的成果写信告诉雅可比,后者大为震惊。雅可比回信说"先生,如果您的一些发现与我从前的工作有所重合,请不要抹去它们。既然您要从我结束的地方起步,必然会有一小部分交集。以后如果您乐意向我通报您的进展以示对我的礼遇,我将只有学习的份儿。"埃尔米特频繁地将他的新结果寄给雅可比,后者则经常把他的论文安排在"克雷尔杂志"或其他刊物发表。当埃尔米特在经过一段更关注数论的时期之后重新回到椭圆函数论的研究上时,他成功地在其代表作《论椭圆函数的某些应用》(*Sur quelques applications des fonctions elliptiques*)中得出了阿贝尔理论和雅可比理论的一个综合体,这本著作在 1877 年开始出现。1880 年之后不久,他开始教授魏尔斯特拉斯的研究工作,也可以说是将这位伟大的柏林人的思想介绍到了法国。埃尔米特编写的教材被广泛使用并颇受好评。

1848 年,埃尔米特被任命为巴黎综合理工学院的助教和招生考官。两年后,他入选巴黎科学院。1862 年,他被提升为讲师,第二年又被提升为毕业考官。1869 年,他成为巴黎综合理工学院的分析学教授,同时在巴黎大学兼有一个类似的职位。对于埃尔米特作为教师所给人的印象,我们有阿达马(Hadamard)的一段描述:"我不认为那些从未听过埃尔米特课的人能够认识到他的教学是何等有魔力,他的讲课充满了对科学的热忱,透过他的声音科学仿佛有了生命,在将科学之美传递给我们时他从未失败,因为他对此是如此有体会,且程度如此之深。"7 年后的 1876 年,埃尔米特辞掉了巴黎综合理工学院的职位,但他在巴黎大学又再干了 21 年。

埃尔米特 1856 年患了天花病,之后在柯西的影响下,他成了一名虔诚的天主教徒。他的数学哲学是一种柏拉图式的理想主义。他坚信数学家从未发明什么,而仅仅是偶尔有幸发现了独立于人类思维的数学世界的和谐。后来,阿达马如此回忆他与埃尔米特的会面:"当我还

是一个年轻学生时，一个愉快的际遇使我能够定期拜访这位大师几分钟。那时，他给我们留下了深刻印象，不仅是他的方法和魏尔斯特拉斯的方法，还有他对科学的热忱与爱。在我们简短但富有成果的谈话中，他喜欢对我说类似这样的话：'偏离信主之路的人必遭毁灭。'这是一个宗教信仰极深的人说的话。然而，一个像我这样的无神论者却能很好地理解它，特别是当他在某些时候补充说：'在数学中我们的作用更像是仆人而不是主人。'"

埃尔米特的家庭生活反映了他在法国数学圈日益趋向中心的地位。他的妻子是数学家贝特朗（Joseph Bertrand）的妹妹，而他的一个女儿则嫁给了皮卡（Emile Picard）。在巴黎综合理工学院执教的整个时期，埃尔米特投入了大量精力与各个层次的学生一起研究。与魏尔斯特拉斯不同，他赋予直觉巨大的价值，而且不认同在初等内容的教学中需要包含特别多的严密性。

在研究中，埃尔米特作为分析学的大师，完成了一些令人敬畏的工作。例如，自古以来人们就知道一般二次方程的解。在意大利文艺复兴时期，三次方程和四次方程的公式解也构造了出来。当伽罗瓦后来证明了一般五次方程无法用通常的代数方法求解时，好像一切都到此为止了。然而，埃尔米特表明，如果允许使用椭圆模函数，一般五次方程将可以求解。

埃尔米特最著名的单个成果是证明自然对数的底 e 是超越数，也就是说，e 不可能是整系数多项式方程的根。超越数曾经被刘维尔研究过，他证明了这种数存在，但直到埃尔米特的工作出现之前，自然出现的常数中没有一个被证明是这种数。事实上，埃尔米特用来证明 e 是超越数的方法，很快就被一个名气较小的数学家林德曼（Carl Louis Ferdinand von Lindemann）借鉴，并用来证明圆周率 π 也是超越数。这是埃尔米特的想法被其他人发展的多个例子之一。

埃尔米特在国内和国外都享有令人瞩目的科学荣誉。在他 70 岁生日时，来自整个欧洲大陆的赞誉不仅反映了他作为年长的数学代言

人的声望,而且反映了他保持与他那个时代的领头数学家广泛联络的实践。在研究中,他的兴趣是广泛的:他更多地是一个代数学家和分析学家而非几何学家,但他为闵可夫斯基(Minkowski)的数的几何研究而欣喜。然而,正如他诸多通信者之一的英国数学家西尔维斯特,他从未完全吸收德国在19世纪发展起来的深刻思想。埃尔米特于1901年1月14日去世,享年78岁。

19世纪后期的许多法国领头数学家都是埃尔米特的学生,这包括:阿佩尔(Appell)、博雷尔、达布(Darboux)、阿达马、若尔当、潘勒韦(Painlevé)、皮卡和庞加莱。在他们之中,博雷尔、阿达马和庞加莱都是我们这本书的主人公。其他数学家在上下文中会提及,但没有篇幅一一细说,因为我们要将空间留给来自世界上其他地方的数学巨匠。

克罗内克(1823—1891)

本书所描述的大多数主人公通常都不得不以教学或其他职业来养家糊口,而且他们的早期岁月常常很不容易。然而,也有少数人是出生在富裕家庭,接受了良好的教育,并且一辈子都衣食无忧。对他们而言,数学研究成了生活的目标,而尽管他们在物质方面没有与其他人竞争的需求,但他们仍然倾向于与同行竞技。利奥波德・克罗内克(Leopold Kronecker)就是一个杰出的例子。



1823年12月7日,克罗内克出生在西里西亚的重要城市利格尼茨,从前属于普鲁士,而现在则属于波兰。他的父亲伊西多尔(Isidore)是个成功的商人,母亲约翰娜[Johanna,娘家姓普劳斯尼泽(Prausnitzer)]也很富有。他们非常关注儿子的教育,因为他显然非常有天分。在当地的

文理中学,他有幸成为年轻的数学教师库默尔的学生,库默尔后来不仅因其研究而且也因其教学而闻名天下。虽然小男孩非常擅长数学,但他一生都对其他科目感兴趣,包括哲学、历史和古典文学。他是优秀的体操运动员,也是游泳好手;之后他又成了一名早期的登山冒险热衷者。他还学了音乐课,并成为杰出的钢琴师和声乐家。

1841 年,年少的克罗内克成为柏林大学的一名学生,在那里狄利克雷正处于鼎盛时期。艾森斯坦和雅可比也是数学系的教员。在那时,德国的大学鼓励学生在其他地方的大学学习一两个学期。克罗内克在布雷斯劳大学待了一个学期,因为库默尔后来到那里任教;他还在波恩大学待了一个学期,在那里他建立了一个学生社团。22 岁时,克罗内克获得了柏林大学的博士学位,学位论文研究的是单位复根。后来成为克罗内克密友的狄利克雷在评审报告中写道,他的工作显示了非凡的洞察力与不寻常的用功,以及对当前数学状况的精确了解。狄利克雷还把这个年轻人引荐给柏林的要人,包括他的连襟、作曲家费利克斯·门德尔松和科学家亚历山大·冯·洪堡。

克罗内克有个从事银行业的非常有钱的舅舅,他掌控着许多农牧企业。舅舅去世后,其资产交给外甥克罗内克管理。这个刚刚拿到学位的年轻人,回到西里西亚抓起了银行业务并经营起土地资产,在这方面取得了引人注目的成功。显然在这段持续了八年的时间里,他也在思考数学,因为他与先前的老师库默尔有频繁的通信。在他离开柏林大学 14 年以后,他终于开始发表他的研究思想,此时,罕有人能够理解这些思想。两年后,克罗内克结束了他的生意,回到柏林大学。七年前他与已故舅舅的女儿范妮·普劳斯尼泽(Fanny Prausnitzer)结婚,他们一共育有六个儿女。克罗内克夫妇非常富有,与柏林的精英很熟,交游甚广。

与此同时,库默尔继任了狄利克雷在柏林大学的职位,与他一起赴任的是魏尔斯特拉斯。克罗内克被选为柏林科学院院士,他还提名了几位外籍数学家成为院士,包括英国的史密斯和西尔维斯特,意大利的

贝尔特拉米(Beltrami)、贝蒂(Betti)、布廖斯基(Brioschi)、卡索拉蒂(Casorati)和克雷莫纳(Cremona)。克罗内克本人则分别于1868年和1884年入选巴黎科学院和伦敦皇家学会。他也经常会被德国之外的同行咨询职位任命事宜,而且他的意见很有分量。作为柏林科学院院士,他可以自由选择是否在大学授课;但事实上,在库默尔的鼓励下,他极有规律地去授课,就好像他是大学里的一名教授。

当黎曼1866年去世时,他在格丁根大学的职位提供给了克罗内克,但考虑到有可能失去他在柏林作为院士的自由,他谢绝了。直到1863年,恩师库默尔决定退休,克罗内克才接任他正式成为柏林大学的教授。他的妻子范妮在1891年去世,而克罗内克自己因承受不起丧妻之痛,于当年12月29日随她而去,这是他68岁生日之后不久。他在晚年正式皈依基督。

克罗内克对数学哲学有很强硬的观点,这也是引发诸多争论的对象。不幸的是,对此他发表的文献非常少,我们所知的大部分都是第二手材料,来自于那些对他的观点强烈反对的人。克罗内克的观点是非正统的,甚至可以说是异端,同时也被误传了。下面一段话引自克罗内克的数论讲义的序言,是他的弟子亨泽尔(Hensel)写的,想必是对其观点的公正论述:

我必须指出克罗内克有意识地对一般算术的定义和证明强加了一个必要条件,这是他在处理数论和代数问题时所奉行的一条严格戒律,正是这一点使他与几乎所有其他人截然不同。他认为,在这些数学框架内,每一个定义能够而且必须可以通过有限多个步骤验证它是否可应用于任何给定的量。同样,对于一个量的存在性证明,只有当该证明方法包含了实际找出这个存在的量的途径时,才能被认为是完全严密的。克罗内克绝不是要完全忽略那些无法满足他的高要求的定义和证明,他认为出现这种情形可能是由于遗漏了某些东西,而弥补这个缺陷是一个重要的问题,由此我们对某个关键点的知识可以得到延伸。此

外，他认为，在这方面一个严谨的表述通常会比不满足这些要求的其他表述形式更简单，他在讲义中对此给出了丰富的例证。

克罗内克经常被人引用的一句话是："上帝创造了整数，其余的一切都是人造的。"然而，对于他的真正立场，尚有不确定之处。克莱因特别不喜欢克罗内克的纯粹主义，评论说，"他主要研究算术和代数，这些工作后来为所有的数学工作树立了智力规范。随着克罗内克的出现，数学中出现了一个新的方向。克罗内克基于哲学上的考虑，只承认整数的存在，至多承认有理数，而想要彻底废除无理数。对他来说，魏尔斯特拉斯的函数论的基础就不是令人满意的。"克莱因后来在《数学在 19 世纪的发展》* 中对克罗内克作出了较为肯定的评价：

克罗内克的一个令人彻底折服的成就是，即便是到了晚年，他仍然能够以如此富有朝气的雄心抱负将新思想引入到我们的科学中，并以一种新的形式维持柏林大学作为数学研究中心的威名。我对他的批评仅仅在于他的偏见，即从哲学的观点来看，他对那些与他本人的研究方向相差较大的观点的排斥。这种片面性更多是因为他的个性倾向而不是原始的天分。绝对的统治权，可能的话要掌控整个德国数学圈，越来越成为了他集中才智与坚韧来追求的目标。

克罗内克特别批评了他的同事魏尔斯特拉斯的那种数学研究方式。两人观点的不同导致了他们个人关系的糟糕后果。早年他们一度是亲密的朋友，可后来竟有了敌意。正如魏尔斯特拉斯的女弟子柯瓦列夫斯卡娅 1885 年在写给米塔 - 列夫勒的信中所说的："恩内斯特勒姆(Gustaf Eneström)提到曾在柏林大学拜访过克罗内克，克罗内克对

---

* 有中译本，齐民友译第一卷，李培廉译第二卷，高等教育出版社分别于 2010 年与 2011 年出版。——译者

函数论很是反感,而且对康托尔充满怨恨。魏尔斯特拉斯也在信中说,克罗内克好像因没成为我们的竞赛评审而郁郁寡欢。他从未说起这件事,而这正是他非常恼火的表现。”这里提到的竞赛是瑞典国王奥斯卡二世(Oscar Ⅱ)为纪念1889年1月21日六十大寿而发起的国际有奖竞赛。担任评审的是埃尔米特、魏尔斯特拉斯和米塔-列夫勒本人;克罗内克认为他本应该也是评审之一。竞赛的组织者是米塔-列夫勒,欲知详情,且看下一章关于他的故事。

重要的是,这些出现在克罗内克人生后期的争论并没有使他的研究成就失色。这始于他1853年的论文,很容易看出分圆域的子域是有理数域的阿贝尔扩张,而他证明了其实所有这种扩张必定是一个分圆域的子域。这是代数数论中的一个基本结果,现在已经有了好多个证明。然而克罗内克本人是否得到了一个证明仍然存疑。也许,就像高斯一样,他对一个结果的发现与对它的规范证明作了区分。

过了许久之后,克罗内克在1880年写信给戴德金谈论他所谓的“青春之梦”。克罗内克对阿贝尔和雅可比研究过的椭圆函数的复乘问题很有兴趣。这个问题是,对给定的关于变量z的椭圆函数$f(z)$,确定所有的复数w,使得新函数$f(wz)$与原来的双周期函数$f(z)$具有相同的周期。克罗内克猜测,带复乘的椭圆函数对虚数域的作用,就如同圆函数对有理数域的作用,即可以生成所有的阿贝尔扩张。虽然他发表了不少与椭圆函数相关的论文,但他未能在生前得到梦想中的定理的一个证明。然而,该定理的陈述是正确的,正如我们将要看到的,大约在第一次世界大战时期,它被日本数学家高木贞治(Teiji Takagi)证明了。

魏尔斯特拉斯写道:“克罗内克与库默尔很不相同。他吸收新东西非常快;他理解思想的能力使他很容易做到这一点。然而,他并不喜欢做穿透式的研究——他缺乏那种将自己投入到与他本人的研究兴趣相隔略远的杰出作品的天分。”据弗罗贝尼乌斯所说,克罗内克并非他所钻研的各个领域内的大数学家的对手:“在分析学方面他逊于柯西和雅可比,在函数论方面他逊于黎曼和魏尔斯特拉斯,在算术方面他逊

于库默尔和狄利克雷，在代数方面他不及伽罗瓦。”事实也许正是如此，但他跻身于19世纪最有原创力的数学家之列是站得住脚的。也许他的过分教条的观点导致了他的成就被低估。正如我们将要看到的，构造主义的事业后来被布劳威尔(Brouwer)继承，而随着电子计算机的应用，克罗内克曾如此热衷的一些问题又重新引发了人们的兴趣。

黎曼(1826—1866)

在19世纪的杰出数学家排名中，黎曼(Georg Friedrich Bernhard Riemann)占据一个特殊的地位。在仅仅15年的数学活动中，他在数学的几乎所有领域都做出了巨大贡献。他研究了积分理论、复变函数论、几何学、变分法、电学理论及其他许多领域的问题。不过，黎曼的成就不仅在于他的学术成果，而且在于他那些极其丰富的想法激发了进一步的研究进展；其成就不仅涉及数学，还涉及力学、物理学，乃至整个自然科学。



在童年时代，他的身体就不太好，疾病和早逝也常常纠缠着他家庭中的各个成员：他的母亲在他才20岁时就去世了，他的兄弟和三个姐妹很快随后去世。死亡的原因很可能是肺结核。在发现结核杆菌是病因之前，欧洲北部的人们认为肺结核是遗传性的，尽管往南一些的人知道它具有传染性。

布列斯伦茨村位于丹嫩贝格市附近，属于汉诺威王国的一个偏僻地区。格奥尔格·弗里德里希·伯恩哈德·黎曼生于1826年9月17日。他的父亲老黎曼(Friedrich Bernhard Riemann)是路德教会的牧师，曾在1812—1814年的拿破仑战争中担任中尉。他在奥地利将军瓦尔莫登伯爵(Count Ludwig Wallmoden)的部队中，该部队以围攻汉堡而出

名。老黎曼到了中年才结婚，妻子是一个法官的女儿，名叫夏洛特 · 埃贝尔(Charlotte Ebell)。1833年，这个家庭从布列斯伦茨搬到附近的奎克博恩村，而且一直呆在那里，直到1855年老黎曼去世。他的儿子伯恩哈德，未来的数学家，深深地依恋自己的家庭，终其一生都与家庭成员保持了最紧密的联系：他羞怯腼腆，只有在家人的陪伴下才感到轻松自在。

5岁时，他对历史最感兴趣(我们可以联想到高斯小时候对哲学感兴趣，雅可比则对古代语言感兴趣)。很快这个家庭开始注意到这个男孩儿惊人的计算能力。6岁时，他就能够在父亲的指导下解决算术问题。14岁时，他进入汉诺威文理中学的高年级班，但他在那里很不开心，两年后他转学到了离家更近的吕内堡，并在那里一直学习到19岁。学校的校长允许他使用其私人图书馆，里面有勒让德关于数论的专著。年轻的黎曼在6天内就把这部900页的专著读完了，在往后的岁月里，它的影响非常明显地体现在黎曼本人对数论的贡献中。

1846年，按照父亲的愿望，黎曼进入格丁根大学神学系学习。不过，他对数学有着如此强烈的兴趣，以至于他要求父亲允许他转到与此有些关联的哲学系。那时候高斯仍然在格丁根大学，不过没有迹象表明黎曼与他有任何实际的联络，而那是很久以后的事情。

在格丁根大学呆了一年以后，黎曼来到柏林大学，狄利克雷、艾森斯坦、雅可比和施泰纳都在那里当教授。尽管艾森斯坦对黎曼特别友善，狄利克雷才是对黎曼影响最大的人。两年后，黎曼回到格丁根大学，听了韦伯的电动力学课程，而韦伯是高斯的弟子。在一年半的时间里，黎曼在韦伯的实验室里当助手，在此期间，他对物理学的兴趣逐渐形成。1850年，黎曼参加了一个关于数学物理及其相关学科的研讨会。利斯廷也参加了这个研讨会，他后来发表了两本拓扑学专著，“拓扑学”这个词是他发明的，以替代莱布尼茨使用的“位置分析”的旧术语。

1851年11月月底，黎曼发表了他的博士论文《单复变函数的一般

理论基础》(Grundlagen für eine allgemeine theorie der funktionen einer veränderlichen complexe grösse)。这篇文章致力于研究解析函数的几何性质。黎曼从高斯止步的地方开始他的研究,并且使用了同样的几何方法。不清楚他是否知道柯西的工作,但不管怎么说,他的理论比起柯西的理论有着巨大进步。而且,黎曼所有的结果一起成为整体图景的一部分,这个整体图景也就是后来我们知道的黎曼曲面或者代数曲线。如同三角函数也可以被认为是定义在圆周上的实值函数,即所谓的圆函数,椭圆函数也可以被认为是定义在环面上的复值函数。黎曼的这篇博士论文包含了现代全纯函数的萌芽,开启了拓扑学的系统研究,给代数几何带来了革命,而且为黎曼的微分几何学方法铺平了道路。高斯一般对年轻人相当冷淡且爱挑剔,但这一次他写了一份赞赏的评价,说它"表明了作者出类拔萃的独创性,而且远远超过了博士论文的要求"。很可能高斯已经知道了黎曼所提出的诸多想法,但他本人从未公开。

在各个数学领域紧张地工作了两年以后,黎曼于1853年12月提交了就职演讲。该演讲在他死后才正式出版,标题可以翻译成"论函数的三角级数表示"。这是一个巧妙的工作,有一段较长的历史导引和关于原始文献的完整引用。正是在这篇文章中,他引入了我们称为黎曼积分的积分类型。在获取职业资格过程的第二阶段"讲师试讲",黎曼提交了三个可选的题目。两个是关于电学理论,他已经有所准备,但是令他意外的是这两个题目都没有被选中。反而是第三个题目被选中了,是关于几何学基础之假设,这是根据高斯的建议而被选中的。黎曼写信给他的父亲:

于是我又陷入窘境,因为我不得不把这个问题解决。我已经重新开始了对电、磁、光和引力关系的研究,而且我已经进展到可以毫不犹豫地将它出版的程度。我越来越相信高斯已经在这个问题上研究了好几年,并和他的朋友(韦伯等人)谈论过它。我自信地告诉你这件事,

以免我被认为是傲慢的——我希望对我来说不是太晚，希望我会获得作为一个独立研究者的认可。

在完成了试讲之后，他又写道：

我如此沉浸于自己关于所有物理定律的统一性的研究中，以至于面临试讲的题目时，我很难让自己离开自己的研究。接着，一方面因为思考该问题，另一方面因为在坏天气下过多地宅在室内，我病了；我那顽固的老毛病又犯了，我无法继续我的工作。在七周后，当天气变好、我也有更多社交生活的时候，我才感觉好一点。夏天我在花园里租了一个房子，得益于此，健康不再让我担忧。在复活节两周后我完成了一些无法抽身的工作，然后立即开始准备试讲，并于圣灵降临节期间将它完成了。我的试讲日期的设定遇到了一些麻烦，甚至差点没有实现我的目标就回到奎克博恩。原因是高斯病得很重，医生担心他活不成了。他太虚弱了，以至于不能考察我，他让我等到 8 月，希望他自己可以好一些，特别是我的试讲看来要拖到秋天了。接着他在圣灵降临节之后的周五决定把试讲定在第二天的 11 点半。周六，我很高兴地通过了所有的事情。

在试讲的听众中，只有高斯能够理解黎曼思想的深度。它超出了高斯的预期，并令他非常惊喜；试讲结束后，高斯用最高的赞赏和罕见的激情来评论它。该试讲不仅是关于数学的，也是关于哲学的。黎曼提出了我们对于物理空间有哪些是确知的这个问题。在我们凭借经验确定对物理空间适用的公设之前，有哪些关于空间的条件或事实是可以预设的？他的断言之一是，欧几里得的公理是经验主义的，而并非不证自明的。黎曼采用的是分析的方式，因为在几何证明中，我们会被自己的感觉误导，并假设并不一定成立的事实。所以，他的想法是通过借助分析，我们可以从一些确实是关于空间的先验成立的条件出发，推导

出必要的结果。于是空间的其他一切属性都会被认为是经验主义的。

就这样,黎曼最终获得了公开授课的权利。尽管最初只有 8 个学生上他教的第一门偏微分方程课,但他逐渐克服了最初的害羞,并与他的听课者建立了亲密的关系,其中包括戴德金。他给父亲写信道:"我已经能够正常地掌控我的课堂。我最初的羞怯和拘谨渐渐消失,我习惯了更多地为听课者而不是为我自己考虑,并通过观察他们的表情决定是否需要继续讲下去或者进一步解释问题。"不过,据戴德金所说,黎曼的讲课风格并没有得到改善。终其一生,他都感到与人交流是困难的。

黎曼的那些学术成就,在为人所知的范围内很少受到同事们的致敬。当 1855 年高斯去世时,来自柏林大学的狄利克雷毫无意外地成了他的继任者。黎曼对狄利克雷有着强烈的仰慕;因为他们的心智类型及科学兴趣异常接近。正如克莱因在他的著作《数学在 19 世纪的发展》中所说:"黎曼与狄利克雷由于有相似的思想而有着强烈的内在共鸣。狄利克雷喜爱将事情以一种直观的方式弄清楚;同时,他会给出根本问题的敏锐的逻辑分析,而且尽可能地避免很长的计算。他的方式也适合黎曼,黎曼接受了狄利克雷的方式,并且根据狄利克雷的方式工作。"此外,狄利克雷还给予黎曼一些实际的帮助,例如帮他在大学里找到一个小职位,这给黎曼增加了少量收入,并让他得以免费租用天文台的一个小公寓。

对黎曼来说,在那些困难的日子里,他缺乏的不仅仅是学术支持。家庭的不幸接踵而至:1855 年父亲去世了,接着是他的妹妹克拉拉(Clara)。其他三个姐妹搬到不来梅的另一个兄弟那里住,于是黎曼在奎克博恩的家不复存在了。这些事件再加上过度工作所消耗的精力,使得黎曼陷入抑郁。戴德金劝告他去附近的哈尔茨山散心,并写信给他妹妹:"我们必须尽可能地帮助黎曼摆脱他当前的不良状态,他是一个如此优秀而且对科学非常重要的人,不过不能让他明显看出我们的意图;给他帮助一直有点难。而唯一可以让他接受的帮助方式是,做这

些不仅仅是为了他，也是为了帮助者自己；他讨厌麻烦别人。他做出一些奇怪的事情，仅仅因为他相信没有人可以忍受他……”

还有更多的不幸在等着他。首先，他的兄弟去世了，于是原来住在不来梅的三个姐妹来到了格丁根。幸运的是，黎曼最终获得副教授的职位，但是抚养姐妹三个给黎曼带来了很重的经济负担。不久，她们中的一个也去世了。一年半以后，狄利克雷的去世对他造成了进一步打击。不过，黎曼开始获得应有的认可了。1859 年，他在格丁根大学被任命为接替狄利克雷的正教授。他当选为柏林科学院的通讯院士，当他来到普鲁士首都接受该头衔时，他和戴德金待在一起，并受到柏林大学三巨头的热烈欢迎。次年春，他来到巴黎，受到埃尔米特等人的热情接待。后来，巴黎科学院和伦敦皇家学会都授予他学术荣誉。

作为正教授，36 岁的黎曼终于结得起婚了。他的新娘埃莉泽 · 科赫（Elise Koch）是他妹妹的朋友，来自梅克伦堡的什未林。婚礼于 1862 年 7 月举行，给黎曼剩余的人生增添了几分色彩。几乎就在婚后，黎曼得了胸膜炎，那是肺结核的第一个征兆。不久，戴德金写道：“他只能在重重困难下讲课。你可以发现他的疲倦无力，他时常思路中断，甚至不能解释最简单的事情。”

黎曼生命的最后几年是与妻子埃莉泽一起度过的，他们几乎一直在意大利，主要是身体方面的原因，也由于他对艺术和古迹感兴趣。1862—1863 年的那个冬季，他们居住在西西里岛，参观古文明遗址，而在回德国的路上，他们又在巴勒莫、那不勒斯、罗马、来航、比萨、佛罗伦萨和米兰停留。黎曼已经结识了 1858 年访问格丁根大学的意大利数学家贝蒂、布廖斯基和卡索拉蒂。比萨大学为他提供了一个职位，但是他感到不能欺骗意大利朋友，因为自己已经过于疲倦，以至于不能授课了。不管怎样，在贝蒂写的一篇重要但不独特的论文中，可以觉察到黎曼对他的影响，在那篇论文里，他引入了后来被称为贝蒂数的不变数。黎曼在刚刚统一的意大利被当作权威得到尊敬，而且毫无疑问对那里的数学发展有强烈的间接影响。

黎曼夫妇最后一次回到格丁根大学,但是冬天的气候对他来说太过严酷。他又有一个姐妹去世了,只剩下一个姐妹还活着。他放弃了授课,在1866年6月底,携带妻子埃莉泽及3岁的女儿伊达(Ida),一起回到意大利。他们随后几周是在马焦雷湖北端的塞拉斯加小村一起度过的。他的精力迅速衰退,他感到大限将至。戴德金在他的讣告中描述了他死前那一天的情形:"他休息于一棵无花果树下,他的灵魂在这片美好的土地上充满了愉悦,他继续着他最后的工作,遗憾的是未能活着完成它。"他于1866年7月20日去世,不到40岁。他被埋在附近的比甘佐罗村。他死后留下的稿纸中发现了一条笔记,说"这些$\zeta(s)$的性质可以从它的一个表达式中推导出来,不过,我并未使之足够简化到可以发表的程度。"其中一个性质被称为黎曼假设,至今仍是一个未解决的问题。

现在,黎曼所引入的概念被认为对现代数学如此重要,以至于他被认为是第一位现代数学家。不过,黎曼的大量工作,或许是他工作中最重要的部分,在他生前鲜为人知;很多都没有得到发表。黎曼曲面的想法在50年后才被后人完全理解,黎曼几何在爱因斯坦发现它可为广义相对论提供框架之后才引人注目。事实上,在黎曼生命的最后10年,他试图构建某种可以看作是统一场论的预案。"在无穷小空间中,几何预假定的有效性与其内在的度量因素相关。在这个问题上,我们应该注意到,在离散流形中,度量原理含于同一个流形的概念,而在连续流形中,它源于其他地方。"即使现在,他的思想的广度尚未被充分认识清楚。

黎曼被认为主要是一个数学家,不过他也热衷于研究物理学,以及数学和物理世界的关系。他写过气体理论、流体动力学、热、光、磁及声学方面的论著。他研究过人类耳朵的机制。在他关于几何基础的工作中,他试图确定哪些关于物理世界的知识是可靠的。他自己认为,物理定律是他最大的兴趣所在。在他的数学工作中,他自由地使用物理论证。很可能,根据克莱因提供的证据,黎曼关于复函数的想法是受他的

电学研究的启发。位势方程*是该主题的核心，也是黎曼研究复分析的关键途径。

史密斯(1826—1883)

有人会谈论这一时期的法国数学学派或德国数学学派(不止一个)，但虽然那时英国有相当杰出的数学家，但你很难说存在任何的英国数学学派。有个故事说，1842 年当雅可比在剑桥某个学院的晚宴贵



宾席上被问及谁是英国最伟大的数学家时，他回答说"没有"。之后这将不再是一个公正的回答：如果我们问这一时期谁是英国最杰出的纯粹数学家，有人会提名西尔维斯特，也有人提名凯莱，但更可能是亨利・约翰・斯蒂芬・史密斯(Henry John Stephen Smith)，他的名字今天变得少有人知了。

首先有必要说一下当时在牛津大学中数学的地位，那与剑桥大学的情况完全不同。牛津大学并不以考试成绩给学生排名，因而竞争远不如剑桥大学激烈。在剑桥大学，直到 19 世纪中叶，任何一个想要参加传统的荣誉学位考试以获得荣誉学位的学生，首先必须成功考过数学荣誉学位考试。而在牛津大学，只有少数学生学过超出初等数学的东西。

史密斯是著名的爱尔兰法官约翰・史密斯(John Smith)与其聪明贤淑的妻子玛丽[Mary，娘家姓墨菲(Murphy)]的第二个儿子。他们一共有四个孩子，两个在幼年夭折，余下了后来出生的女儿埃莉诺(Eleanor)，以及 1826 年 11 月 2 日出生于都柏林的儿子亨利。因此，史密斯

* 即拉普拉斯方程，是一种偏微分方程。——译者

几乎与黎曼同龄,但这两个人之间形成了鲜明的对比。小男孩对父亲几乎没有留下任何印象,因为父亲在他未满两岁时就去世了。由于父亲的遗嘱有争议,母亲暂时生活在拮据的条件下,当问题最终以她所满意的方式解决时,她搬到了英格兰,最终定居在怀特岛的赖德。她是一个有学问有能力的女人,完全能够教育好儿子。孩童时期的史密斯体弱多病,但很快就发现他极其聪明。当他 11 岁时,母亲为他雇了一位家庭教师,他对史密斯印象深刻。他描述史密斯是一个非常有趣的男孩,特别谦逊、可爱、感情丰富。在每天五小时的学习中,他读了许多公认的经典作品,同时学习了拉丁文和希腊文,还学习了一些希伯来文及少量的数学。

不幸的是,那位家庭教师后来离开了,而且很难找到一个替代者。于是母亲把家搬到了牛津,在那里找到了另一位优秀的家庭教师,他恰好是一位优秀的数学家。当这位教师得到拉格比公学的一个职位时,基于学校的声望,史密斯也随他而去。然而,两年以后,他的母亲和作为他监护人的叔叔认为,与其继续在学校再待一年,不如在欧洲大陆过上一段时光,于是在那年冬天全家搬到了尼斯,而在次年夏天又搬到了卢塞恩。史密斯还报名申请并赢得了牛津大学贝列尔学院的奖学金,因而可以在 1845 年的复活节入读牛津大学。在贝列尔学院面试过史密斯的乔伊特(Benjamin Jowett),后来成为他一生的挚友,乔伊特宣称:“他比我在牛津大学认识的所有其他人都更有天分。他有最清晰通透的思维,以及很少在一个如此年轻的人身上可以找出的对世界和人性的自然体验。”不幸的是,当他与从卢塞恩搬到罗马的母亲和妹妹住在一起时,这个年轻人患上了天花,而当他结束了牛津大学的第一个学期与他们重新团聚时,又不幸感染了疟疾。他认为当年冬天最好不要返回英国;于是他那个冬天在巴黎度过,并在巴黎大学和法兰西学院学习。这段经历对他的数学发展是关键性的。

当他 1847 年复活节返回牛津大学时,他发现大学正处于宗教

争论中，对此他持中立态度。两年后，当他完成了耀眼的本科生涯时（这以他获得古典文学和数学两个一等荣誉学位为顶峰），他入选为贝列尔学院的研究员。在乔伊特的领导下，贝列尔学院成为牛津大学学术地位领先的学院，而当史密斯成为数学导师后，这一地位进一步提高了。虽然他在古典文学方面也是同样突出，也考虑过步父亲的后尘为法律界效劳，但他最终决定以数学为专业，部分原因是，他的视力很弱，阅读对他来说是一件很痛苦的事情。在数学的各个分支内，他选择了专攻数论，因为他为高斯的大师级著作所吸引，但他也研究椭圆函数论，偶尔也研究几何学。同时他继续广泛地学习，例如他还上过化学课。他的一位同事后来这样说起他："我不知道在哪个学科上史密斯会坦承自己略懂一二，但我就学术问题向他求教时，从没有遇到一个分支是他一无所知的，我从他那里学到的总是比从别人那里学到的要多。"

1857 年，他的母亲去世了，自然地，他的妹妹埃莉诺搬来跟他住在一起，他们的安排是，在读书期间，兄妹俩一起住在牛津大学，而在其他时候则各住各的。埃莉诺是一个能力非凡和极有主见的女人，主要精力投入到慈善和教育事业。她为牛津大学的妇女设立了第一个系列讲座，后来又在建立了"妇女协会"的委员会工作，这个协会再后来成了牛津大学萨默维尔学院。在牛津大学，她与哥哥有许多消遣，但在放假时，亨利经常外出，到瑞典、挪威、意大利、西班牙和希腊。他喜欢与尽量少的伴侣出游，通常并不很成功；他的不同职位带给了他们中等的收入。

1860 年，现任几何学萨维尔教授鲍威尔（Baden Powell）的去世造成了职位空缺，史密斯渴望能够得到该教席。萨维尔教席对"基督教世界"的所有候选者开放；但评选委员会独立于大学。史密斯犹豫不决地提出了申请——他认为布尔也许更受欢迎——但他被选中了，时年 34 岁。作为教授，他开始讲授几何学主题，但后来增开了一些更加分析化的课程，这反映了他本人研究兴趣的发展。

他在吸引学生听课方面取得了非凡的成功(而他的继任者西尔维斯特发现做到这一点很难)。1861 年,他当选为伦敦皇家学会会员,后来他又获得了剑桥大学和都柏林大学的荣誉学位。他是伦敦数学学会的第一批主席之一。

除了其教授职责,他还继续担任贝列尔学院的本科生导师,直到1873 年牛津大学的另一个学院——基督圣体学院——给他提供了一个没有教学任务的研究员职位(在那时的牛津大学,教授并非自动成为学院的研究员)。他还成为了大学博物馆的管理人,这个职位带给他一套舒适的房子。然而,由于他如此的睿智、友好而且善于调停,他常常被选为某个委员会成员之类的职务,不论是在牛津大学之内还是在别的地方;而且毫无疑问他公务极其繁忙。在政治上他是一个自由主义者,且不情愿地被说服作为大学代表来竞选议员,好在没有被选上。他最后一次公开露面,是在牛津市政厅发表演说,支持请求议会将公民权延伸到农民等的提议。

离开讲台回家以后,史密斯去世了。过度工作逐渐损耗了他的健康,疟疾的复发,伴随着肝脏疾病和其他问题,导致他在 1883 年 2 月 9 日离世,享年 56 岁。在他的葬礼上,一大群本科生和资深学者,以及来自英国各地的其他名人都来向他道别致敬。他被认为是牛津大学最杰出的学者,他的去世是学校的巨大损失。自然科学家赫胥黎(Thomas Huxley)敏锐地将他描述为:“我所遇见的最有能力的人之一,他的巨大能力的作用几乎是被他非凡的绅士风度与妙语散播的开玩笑方式所离奇地放大了。我认为,如果他在其极敏锐的智力与特宽泛的知识之外,还能加上对任何一门知识的强烈关注的话,他会成为我们这个时代最伟大的人物之一。”然而,尽管史密斯完全缺乏野心与抱负,但他对公共事务有很强的使命感。

史密斯在英国科学促进协会的活动中发挥着领导作用。在那个讨论场所中,发展成为英国科学的黄金时代要靠什么这一激动人心的新思想被激烈争论,没有其他地方比牛津大学讨论得更热烈了,但纯粹数

学并不是一个比较有争议的科目。当他在1873年主持协会数学物理分会在布拉德福召开的会议时，他邀请了埃尔米特和克莱因来做报告，而且他好像经常与欧洲大陆的一流数学家互访。他那两卷辉煌的数学论文集今天很少有人读。这里包含了许多有趣的传记材料，但他为何被视为欧洲(而不仅是在他的母校)位于前列的数学家，并非一眼就能看出。

1858年，史密斯被英国科学促进协会要求写一个关于数论当前状况的报告，作为科学几个分支的报告之一。最终在1859—1865年期间，他一共给出了关于数论各个方面的6篇报告，对他眼中的数论做了一个精彩的综述。他从费马、勒让德和高斯的研究讲起，继而讨论了雅可比关于椭圆函数、库默尔关于理想数的工作，以及埃尔米特和克罗内克的最新成果。多年以后，希尔伯特和闵可夫斯基被要求编写这一综述的一个德文修订版本《数论报告》。闵可夫斯基放弃了他那部分的工作，因此这部数论学家眼中的圣经归功于希尔伯特一个人，而他广泛使用了史密斯的报告。

在1854年，史密斯就写了一篇关于数论的研究论文，他是用拉丁文写的，大概是向高斯的《算术研究》致敬。几个世纪以来，拉丁文在科学交流中一直作为通用语使用，而这一次大概是如此使用拉丁文的最后几次之一了。很长一段时间以后，取而代之的是法文，某些程度上还有德文，而拉丁文仅仅保留在官方场合使用。为了准备他的数论报告，史密斯做了进一步的研究。他得到的一些结果被融合到报告中，另一些则单独发表了。例如，他对将数表示为平方和的问题产生了兴趣，特别是确定一个给定的数能被如此表示的方式种数。这个问题曾被前人研究过，著名的有高斯，他用的是代数方法，而更近的则是雅可比，他借助了椭圆函数。史密斯回到了高斯的方法，并于1867年将他的新结果发表于《皇家学会会刊》(*Proceedings of the Royal Society*)上。

然而，故事还没有结束。1881年，他职业生涯的最后一年，在一次骑马意外后的康复期，他偶然看到了法国《科学院通报》的一

份过期刊物，宣布巴黎科学院组织了一个大奖赛，题目正是这一个，具体就是找到将任意一个整数表达为五个数的平方和的方式数的一个公式。很久以前，高斯的弟子艾森斯坦曾宣布了这一问题的一个解，但很少提及他如何得到这一结果。既然史密斯在15年前发表的论文中已经解决了这个问题，他就写信告知埃尔米特。经过尴尬的磋商，他们同意史密斯按照大赛的要求重写那篇论文，埃尔米特也认为这样做很公正。结果发现，还有另外两个参赛者。其中一个没有解决问题，而另一个则解决了，用的是与史密斯相近的方法。作者是18岁的闵可夫斯基，当时是柯尼斯堡大学的一名学生。显然，在不知道前人工作的情况下，闵可夫斯基重新构造了任意多个变量的整二次型的整个理论。他甚至给出了一个比他的对手更好的表述，因为他利用了二次型亏格的一个更一般的定义。闵可夫斯基被指责有剽窃之嫌，遭受到重重敌意。最终，闵可夫斯基与史密斯分享了大奖，但那时史密斯已经不在人世了。

我们必须要提一提史密斯在分析方面的工作。1875年，他发表了一篇引人注目的论文《论不连续函数的积分》(On the integration of discontinuous functions)。他在那里引进了现在被称为康托尔集的东西。直到8年以后，这一工作才在康托尔本人的工作中出现，因此他没有宣称其原创性。史密斯似乎也是第一个预见到测度的概念与积分理论有关的数学家，虽然博雷尔和勒贝格(Lebesgue)看似对此毫不知情。他的几何学研究使他在1868年分享了柏林科学院的施泰纳奖。自40岁以后，他在很大程度上放弃了研究工作，因此在后来发表的这些文章中，他吸收了早年的一些思想。难以想象，如果条件许可，他会对数学做出多少更大的贡献。

史密斯被认为是他那个时代最卓越的健谈者之一*。他是一个优秀的讲述者，有一次当他解释一个老问题的新解法时，他作出了如下令人难忘的评论："先生们，正是这种方法独特的美，使它得到具有真正科学头脑者的钟爱，该方法在任何情况下都不可能是实用性最低的。"

戴德金（1831—1916）

就像史密斯一样，戴德金（Julius Wilhelm Richard Dedekind）可以被描述为高斯晚期的一个弟子，但他更直接地受到狄利克雷的影响。在他职业生涯的早期他就返回他的家乡不伦瑞克小镇，此后一生都心满意足地停留在那里，与他的姐姐住在一起，安静地为现代代数学奠定基础。在他过世后，人们这样描述他："戴德金不仅仅是一位伟大的数学家，而且是现在和过去的整个数学史上最伟大的数学家之一，他是伟大时代最后的英雄，高斯的关门弟子，他的工作不仅吸引了我们，还有我们的老师，以及我们老师的老师。"

戴德金的全名是尤里乌斯 · 威廉 · 理查德 · 戴德金，他 1831 年

---

* 作为补充，我们可以提及史密斯在 1873 年于布拉德福召开的数学物理分会会议上所做的报告［见 Presidential Address to Section A （Mathematical and Physical Sciences） of the British Association, Bradford, 1873. *Nature* 8 （1873）, 448 – 452］。在几个月之前，麦克斯韦（Maxwell）的巨著《电磁通论》在牛津大学出版了，他以极大的热情与敏锐的洞察力介绍了这一进展：

今年麦克斯韦教授出版了一本电学论著，对那一科学的数学理论给出了一个完整的论述。数学家只要随便翻一翻这本书就不难很快发现，它包含了理论的第一纲要（甚至是比第一纲要更多的东西），而这个理论已经很大程度上增加了纯粹数学的方法与源泉，这个理论有一天将回报抽象科学，甚至要超过天文学对抽象科学的回报。正如古代的天文学一样，现在的电磁学为数学家提出了一套全新的问题，为求解它们需要创造崭新的方法，数学家应该为此而感到幸运，当古老的数学天文学的科学兴趣衰退的时刻，一个如此广袤的将数学应用于物理的研究领域，向他们敞开了大门……

正如戴森（Freeman Dyson）在其著名的吉布斯讲座"错失的机会"（见 Missed opportunities. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 78（5）, 635 – 652）中所评论的，"这些话表明了至少有一位数学家确实理解了麦克斯韦的工作对数学提供的挑战的历史意义。考虑到他是一个以解析数论工作最为著称的非常纯粹的数学家，史密斯的洞察力就更加引人注目了。"——译者



10月5日出生在不伦瑞克,这也是高斯的出生地。他的先祖,特别是母亲那一方,在德国的那块区域极其杰出。他的父亲尤里乌斯·莱温·乌尔里希·戴德金(Julius Levin Ulrich Dedekind)是一位内科医生兼药剂师的儿子,本人是一名法科毕业生、教授,也是高斯所上的大学预科机构卡罗林姆学院的社团法律顾问。他的母亲卡罗琳·亨丽埃特[Caroline Henriette,娘家姓恩佩乌斯(Emperius)]是卡罗林姆学院一名教授的女儿,同时也是一位帝国邮政局局长的孙女。理查德是四个孩子中最小的一个。他唯一的哥哥阿道夫(Adolf)成了不伦瑞克地方法院的院长;姐姐马蒂尔德(Mathilde)在1860年去世。另一个姐姐尤丽叶(Julie)是小说家,理查德的后半生就是与她住在一起。

在7岁到16岁期间,年轻的戴德金就读于不伦瑞克当地的文理中学。他一开始的兴趣是化学和物理学,而数学对他只有很小的吸引力;然而他很快决定将精力倾注在数学上,因为他感觉自然科学缺乏恰当的逻辑结构。1848年,他进入卡罗林姆学院,在那里他学习了初等的解析几何、代数、力学和微积分。结果,当他1850年进入格丁根大学时,他比那些直接来自于中学的学生的基础要好得多。为培训文理中学教师的指导者,格丁根大学不久前成立了一个数学研讨班。戴德金是研讨班的一员,第二年加入的还有黎曼。戴德金对理论科学感兴趣,与黎曼不同的是,他很少关心实验性的工作。尽管如此,他们有很多共同的兴趣,并发展起持久的友谊。

在1850—1851年的冬季学期,戴德金听了高斯关于最小二乘法的课。在第二章关于高斯的故事中曾对这一课程做过叙述,而戴德金给出了一个更完备的叙述(略有缩写),包含了一些有趣的细节:

作为不伦瑞克本地人，我早就听人说起过高斯，我坚信他的伟大，尽管不知道这究竟意味着什么。当我第一次听到他对虚数(当时人们仍然认为这是不可能的数)的几何表示时，印象极其深刻。当时我是卡罗林姆学院的一名学生，我已经涉足了一点高等数学，之后不久，当高斯在1849年庆祝他的博士学位论文发表50周年时，我们学院的老师们向他写信祝贺。在1850年复活节，我来到了格丁根大学，在那里当我听了施特恩关于数论元素的一个短暂但非常有趣的课程以后，我略微长了一点见识。我偶尔会碰到高斯，每每看到他威武而令人敬畏的身影我就很激动，通常我会在文学博物馆的某个固定位置近距离地看到他，他时常去那里读报。

显然，高斯常常狠狠地盯着那些手里拿着他想看的报纸的人。学生因此送了他一个绰号“报纸老虎”。戴德金继续回忆道：

在下一个冬季学期，我认为自己已经足够有能力来听他关于最小二乘法的课，因此，腋下夹着这门课程的教材，心里面不带任何悸动，我迈入了他的起居室，发现他坐在一张桌子旁。我说想选他的课，可他似乎并没有感到多少喜悦，我还听说他并没有想好要指导这门课程。他在书上给我签了名，短暂的沉默之后说道：“也许你知道，我对这个讲义是否定型一直非常怀疑；你住在哪里？在理发师福格尔(Vogel)那儿？哦，很幸运，他刚好也是我的理发师，我会让他给你通知。”几天后，城里颇负名望的福格尔，带着他重要的使命，来到我的房间告诉我，还有其他几个学生也选了高斯的课，而枢密顾问高斯将开这门课。

我们一共有9个学生；我们基本上全部正常上课，很少有人缺席，尽管在冬天到天文台的路有时并不好走。教室非常小，与高斯的办公室相隔一间休息室。我们坐在一张桌子边，桌子较长的那一边只够三个人舒适地坐下，四个人就有点挤。高斯坐在正对着门的讲台边，离桌子的距离适中，当我们9个学生全部都到场时，最后来的两个人必须坐

到离高斯很近的位置，并在自己的膝盖上做笔记。高斯头戴轻轻的黑帽，身穿褐色长外套和灰裤子，他通常舒坦地坐着，目光低垂，身姿略佝偻，双手放在膝盖上。

他说话不看笔记，很自如，非常清晰，简单明了；但当他想强调一个新观点时，他就会使用一个特别有特色的词，并且会突然抬起头，转向坐在他旁边的某个人，用他那漂亮、深邃的蓝眼睛凝视着这个人。这是令人难以忘怀的一幕。如果他要从对原理的解释进展到数学公式的建立，他就会站起来，以平静挺直的身姿在黑板上用他那特别优美的字体板书，而且总能够在很小的空白里经济地、从容地写下要写的东西。而对于数值方面的例子，他特别重视对其仔细核算，他会带着记录了必要数据的小纸条。

1851 年 1 月 24 日，高斯讲完了课程的第一部分，使我们掌握了最小二乘法的本质。接下来的课程中，他特别清晰地发展了概率演算的基本概念和主要定理，并用独创的例子加以解释，作为建立这种方法（即最小二乘法）的第二种和第三种模式的引导，这里我不能再展开下去了。我只想说，随着这些杰出的课程，我们的兴趣越来越浓，而且课程中还处理了一些来自于定积分理论的例子。但我们也感觉到，高斯本人虽然一开头对这门课没有多少兴趣，但在教学过程中他似乎也感受到某种乐趣。就这样，当 3 月 13 日结课时，高斯站了起来，我们都跟着站了起来，他以亲切的词句跟我们道别："我要感谢各位从未缺席并聚精会神地听我这门也许可以说是相当枯燥的课。"虽然已经时隔半个世纪，但我仍对这门据说是"相当枯燥"的课念念不忘，这是我听过的最好课程之一。

在接下来的一个学期，戴德金又听了高斯的课，这一次是高等大地测量学。1852 年，仅在四个学期以后，戴德金就在高斯的指导下完成了博士学位论文，论文研究的是欧拉积分理论，戴德金也是高斯指导的关门弟子。高斯证实戴德金懂得很多，而且非常独立；他还补充说"对

他的未来表现充满了期待”。

然而,戴德金还不够资历在格丁根大学做博士后研究工作,因此接下来的两年他用于弥补这一不足,并在黎曼申请编外讲师资格几周之后,也准备提出申请。1855 年狄利克雷来到格丁根大学之后,戴德金听了他关于数论、位势论、定积分和偏微分方程的课。他很快与狄利克雷发展起深厚的私交,并成为狄利克雷社交圈的一份子。

在 1855—1857 年的冬季学期,戴德金听了黎曼关于阿贝尔函数和椭圆函数的课。因此,尽管已经是一名有资历的教师,他还在持续紧张地学习。他本人在这一时期的课程是值得一提的,因为他也许是第一个讲授伽罗瓦理论的大学教师;他在课堂上第一次引入了代数意义上域的概念。只有很少的人来听这门课,而当戴德金(先于若尔当)比伽罗瓦多迈出一步——以抽象群来代替置换群的概念时,学生就只剩下了两个。

1858 年,戴德金被任命为苏黎世高等工业学院的教授,这一机构后来演变为苏黎世联邦理工学院。他因此也成为了为得到德国大学职位而将第一步迈向瑞士的诸多德国数学家中的头一个。1859 年 9 月,他陪伴黎曼前往柏林,后者刚刚被选为柏林科学院的通讯院士。戴德金在那里见到了魏尔斯特拉斯和其他柏林学派的领袖成员。1862 年,戴德金接受了不伦瑞克高等工业学院的一个职位,这个学院的前身就是卡罗林姆学院。此后,他都留在故乡,对换到一个更有前景的机构的任何可能性都不予考虑。他与哥哥和姐姐一起居住的这个熟悉的小环境完全满足他的需求。他的职位也给了他做科研所需要的一切闲暇和自由。

当 1872 年戴德金成为高等工业学院任期三年的校长时,他在将学院向工业大学的转型中发挥了重要作用。除了在蒂罗尔、瑞士和黑森林度假,他很少出游。戴德金有极高的音乐天分:他是娴熟的钢琴师和大提琴演奏家,还将他哥哥阿道夫写的剧本谱曲成小型歌剧。1894 年 4 月 1 日,他正式退休了,此后过着安宁的生活,不过他偶尔也继续讲

课。戴德金有一次被错误地报导在某天去世,这促使他写信给负责人"在你的报导中,在关于日期的某页,至少年份是不对的。那一天我过得很舒坦,并与我的朋友康托尔相谈甚欢。"事实上,除了1872年他父亲过世后曾重病一场,戴德金一直非常健康,直到1916年2月12日在84岁高龄时平静地过世。自他返回不伦瑞克以后一直与他住在一起的姐姐尤丽叶,比他早去世两年。

今天的学生们对戴德金的名字耳熟能详,是因为他通过"分割"有理数的有序集来构造实数的方法,这与康托尔用柯西序列构造实数的方法比肩而立。同样的想法哈密顿也提出过,也许还有其他人,但第一个将它系统发展的是戴德金。他将他关于集合的想法详细叙述在1888年出版的书《数是什么,又应该是什么?》(*Was sind und was sollen die Zahlen*?)中。然而,他在代数方面的贡献重要得多。他发展了代数整数理论,后来被埃米·诺特(Emmy Noether)利用现代代数学的概念进一步拓展。她非常崇拜戴德金所做的工作,在她讲授这一主题的课上,她会经常如此点评:"你将发现这已经出现在戴德金的工作中。"狄利克雷去世后,戴德金在1871年出版了他的这位朋友和导师的《数论讲义》(*Vorlesungen über Zahlentheorie*),并补充了几个他本人的研究成果作为附录。这些附录被认为是创造理想数理论最重要的源泉之一,位于代数数论的核心。10年后,在他的弟子海因里希·韦伯(Heinrich Weber)的帮助下,他为"克雷尔杂志"写了深刻的《单变量代数函数理论》(Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen)。

分别自1862年、1888年和1910年开始,戴德金陆续成为格丁根科学院、柏林科学院和巴黎科学院的通讯院士,戴德金的成就在他生前就得到了公认。有许多科学荣誉加给了他,特别是在他博士论文发表50周年的庆典上。在性格和生活方式上,戴德金与高斯很相像。他们的数学品味也相似,虽然高斯的兴趣显然要广泛一些。戴德金的科学研究也受到狄利克雷和黎曼的强烈影响,他与他们也有很多相同的品味与观点。他们三人并非不清楚自己的价值,但他们的谦逊腼腆从未

让与之接触的人感受到这一点。野心对他们来说是不存在的，当他们面对自己智力上的才华与优秀时，他们会感到难为情。作为对高斯评价的回应，戴德金以此总结："对我所取得的成就与我所成为的人，我必须要更多地感谢我的勤奋，和我不知疲倦的工作，而不是任何杰出的天分。"

李(1842—1899)

很难想像，如果没有李群的概念，现代数学将会是什么样子。这个概念出现得出奇地早，就在群的概念出现之后不久，可它既不是出自法国数学家，也不是出自德国数学家，而是出自挪威人马里乌斯·索弗斯·李(Marius Sophus Lie)。当时拓扑学还处在婴儿期，因而李主要是从局部而非整体上思考，因此这一时期的李群概念通常应该被看作李代数。如今我们所知的李群理论，是在此半个世纪之后为外尔(Hermann Weyl)所完善的。



约翰·赫尔曼·李(Johann Herman Lie)是挪威西部努尔菲尤尔埃德的一位牧师。他的妻子来自特隆赫姆一个著名的家族。他们的儿子马里乌斯·索弗斯，未来的数学家，出生于1842年12月17日，因此比若尔当小四岁。在他很小的时候，全家搬到了克里斯蒂安尼亚(现代的奥斯陆)附近的莫斯，他在那里长大。后来他被送到克里斯蒂安尼亚的尼森拉丁实科学校，并于1859年毕业。李在中学的各科成绩都很优秀，但他那作为群论先驱的数学老师西罗(Ludvig Sylow)后来评论道，他当时就没有怀疑过李的潜能。不过李自己却说，他的数学探索之路漫长而艰难。

李高大壮实，面颊开阔，笑声高昂。因为他擅长体育，特别是体操，

所以对他来说考虑从事军事职业生涯是自然的，但他因为眼睛散光而放弃了。作为替代，他1859年进入了大学，一开始修的是语言，但自从希腊语不及格后就转向了理科。他先前的老师西罗开始在大学里讲授群论，当时很多地方还没有开设这门课。李听了这门课，结果表明这对他以后的研究具有非凡的重要性。关于李和他的体魄，在克里斯蒂安尼亚流传着许多故事。有个周末他返回莫斯去看望父母：他徒步60千米走回家，结果发现父母不在家，于是又徒步走回学校。

李1865年从大学毕业，但没有取得他所期望的荣誉。接下来的几年对他来说并不容易。他多才多艺，而且搞不清楚自己究竟想干什么。他试过在中学教数学，在天文台做助手，但这些都没有让他真正满意。转折点出现在1868年，当他发现了彭赛列和普吕克关于现代几何学的工作时，他突然感到发现了一个他的才能可以迸发出来的领域。他特别为普吕克的下述想法而激动：将作为空间元素的点替换为更复杂的对象，如直线、曲线和曲面。此后，他感觉自己可以愉快地投入到数学中去。

李发表的第一篇论文出现在1869年，虽然起初在让挪威科学院接受它时遇到了一些困难。论文展示了复平面的一个新的表示。他因此而获得了一笔游学资助，可以去国外继续他的研究。当时最显然的选择是去巴黎或德国的几所大学之一。李首先来到柏林大学，他在1869—1870年的冬季学期在那里学习，正是在那里，他有幸结识了另一个天才的年轻几何学家克莱因。尽管两人的性格和观点多有不同，但他们成为了好朋友，并且在以后的岁月里深深地影响了彼此。被普吕克的线从理论强烈影响的这个年轻人，在库默尔的研讨班上极其活跃，这个研讨班讨论的是与哈密顿的光线理论和同余式的微分几何有关的课题。

当李离开柏林时，他取道格丁根前往巴黎；后来克莱因也来与他作伴。在巴黎，他们接触最多的法国数学家之一是微分几何学家达布。而若尔当的大作《置换与代数方程论》（*Traité des substitutions et les*

équations algébriques）也刚刚出版。正是在巴黎的这段时期，李开始研究变换群，这成为他的一个主要研究领域。

1870年普法战争爆发时，克莱因不得不返回德国。李也不得不离开巴黎，但他决定徒步旅行。然而他没有走出枫丹白露，就被认定为普鲁士奸细，抓进了监狱。他的数学笔记被认为是用密码写的军事机密。克莱因从德国寄来的一封信更增添了对他的怀疑。用达布的话来说：

他每天在森林里漫步，各种思想在他头脑里不停翻滚着，他在人迹罕至的地方停下来，用铅笔做笔记、画图。在那时，这是足以令人起疑心的。在枫丹白露被捕入狱以后……他联系了夏尔、贝特朗等人。我前往枫丹白露，让皇家检察官相信了他被查封的所有笔记涉及的是复形、正交系和数学家的名字，跟国家机密毫无关联。

多亏了达布的帮忙，一个月以后李被释放，刚好避开了普鲁士对巴黎的封锁，他取道瑞士和德国返回挪威，再没有遇到麻烦。

后来他被克里斯蒂安尼亚大学接纳为研究员，这让他完成了《论一类几何变换》（On a class of geometric transformations）的论文，并在1871年获得了博士学位。这篇论文在次年以一个长篇的形式发表在《数学纪事》上。李此时申请了瑞典隆德大学的一个教席，并在那里短期授课，但一些希望他留在克里斯蒂安尼亚的朋友向挪威政府呼吁，结果在1872年，他被母校任命为副教授。同时，他与来自特韦德斯特兰的安娜·伯奇（Anna Birch）订婚，两年后他们结婚；他们有三个孩子，两子一女。他们的婚姻很幸福，李非常顾家；家人的情感支持对他的幸福至关重要。

李现在步入了科研上最富有成果的时期。他的起点曾经是几何学，但现在他转向了微分方程理论。他开始洞察出他的变换群与一般的对称性之间的关联。此时，李所关注的是连续群，而克莱因关注的则是离散群。这两个年轻人时常通信。后来克莱因如此描述他们之间的

差别:“李是一个非常有成效的研究者;他发展出他本人的思想,只有当那些外来的东西能引起他的直接兴趣时,才会引起他的注意。我本人已经在波恩发展了这一思想,我一直坚信,通过理解和比较各种不同观点,我就能取得某种科学成就。特别地,我当时及很久以后还对物理学产生兴趣。我决不像李那样心中只有数学。”

尽管他在本土的学术界很孤立,但19世纪70年代是李一生中最紧张最有创造力的岁月。然而,他对自己的思想没有引起国外数学家的更多关注而深感不满。在一封写给德国通讯记者的信中,他写道:“要是我知道如何让数学家对变换群及其对微分方程的应用感兴趣该多好,我确信——在这个问题上绝对确信,这些理论将来会被视为根本性的理论。我想现在就形成这样的印象,因为首先我可以取得十倍的成就。”这一不满引导他重新研究微分几何。1882年秋,他重访了巴黎,并好像给法国数学家留下了深刻印象。他写信给克莱因:“在科学院我见到了阿尔方(Halphen)、达布、庞加莱、莱维(Lévy)和斯特凡诺斯(Stephanos),他们每个人都很热情。无论如何,我的几何学研究在巴黎比在德国更有名。我期望也有人愿意听我讲变换群。”尚未听说克莱因的埃尔兰根纲领的庞加莱对李解释说,“所有的数学都是群的故事”。后来李再次写信给克莱因:“达布极其深入地研究了我的工作。至少他在巴黎大学把我的理论更多地搬到课堂上,例如直线几何学与球面几何学、切触变换和一阶偏微分方程,这很不错。但可气的是,他接连抢夺我的研究成果。他做了些非本质的修改然后拿去发表,但从未提及我的名字。现在他又开始弄常曲率曲面了。”

克莱因理解李在克里斯蒂安尼亚大学所感受到的数学上的孤立,没有任何人能分享他的思想,因此在1884年,克莱因派了他的一个学生恩格尔(Friedrich Engel)到克里斯蒂安尼亚跟随李学习了9个月。李的几何思想通常是靠直觉获知,恩格尔在将它们转换为更精确的数学形式从而能够用于发表方面大大地帮助了李。恩格尔和索弗斯·李建立了长达一生的亲密友谊。

两年后，接替转到格丁根大学的克莱因，李接受了莱比锡大学的一个教授席位。这给了他想要在主要的数学中心工作的机会，在那里他可以向更能接受他的人阐述他的思想。他坚信变换群的理论与微分方程的理论相关。写出作为其基础的群论是一项长期的计划，直到1893年，三卷本的《变换群理论》(*Theory of Transformation Groups*)才完成。李本人只写了序言，而其他所有内容都是恩格尔和李的学生舍费尔(Georg Scheffers)执笔的。

与此同时，他与巴黎数学家的接触也开始有了回报。在那时，年轻的法国数学家去德国求学是极不寻常的；令李备感骄傲的是，巴黎高等师范学院将一些最好的学生派送到他门下学习。一些年轻的美国人也来到莱比锡大学追随他学习，也许是被他无拘束的教学风格所吸引。"李从不系领带"，有学生回忆说，"他的课会这样开场：'伙计们，请把你们的笔记给我看看，这样我就能想起上节课我们讲到哪里了。'然后坐在前排的学生会递上笔记，而李则慢慢的点点头，说'现在我想起来了。'"然而李也并非没有批评者。例如，克莱因就有一次同时抱怨魏尔斯特拉斯和索弗斯·李，因为他们只讲自己的那些完全与众不同的观点，而将其他观点排斥在外。

李发现莱比锡大学的生活并不完全适合自己。首先，语言不同就成了一个问题。他的教学任务比在克里斯蒂安尼亚大学要重得多。他第一次有了一批优秀的研究生，包括舒尔(Friedrich Schur)、施图迪(Eduard Study)和豪斯多夫(Felix Hausdorff)，可是一旦毕业并得到其他地方的职位，他们就自然而然离开了。他越来越厌倦指导那些能力差且有依赖性的学生。令李尤其懊恼的是，他发现自己被同事当作克莱因的弟子对待。他开始失眠，并在1889年秋天经历了一次精神崩溃。他进了汉诺威附近的一个精神病治疗所，他在那里坚称自己不可能是病人，抗拒对他实施的麻醉治疗。第二年他能够重新开始教学了，但他的信件显示，直到两年后他才完全康复。那时他写道，他重新获得了健康，并且"伴随着睡眠，生活和工作的乐趣又重新回来了"。

从精神崩溃中恢复后，李似乎重获了他的科研能力，但他坦率的性格大大改变了。他变得越来越敏感、急躁、多疑和愤世嫉俗。也许他所表现出的沮丧与偏执的症状是由未确诊的恶性贫血导致的，这也最终导致了他的死亡。他开始尖锐地攻击他的同事，甚至与他忠实的弟子恩格尔绝交。1892年，在克莱因与李之间产生过一次重大的冲突。克莱因想修订他20年之前的埃尔兰根纲领，希望补充一些李的工作。但关于如何做这件事，两人之间意见分歧很大。此外，与他们先前的约定相违，克莱因烧毁了李在1877年以前写给他的所有信件。1893年，李通过公开攻击克莱因而震惊了德国数学家们，因为克莱因当时是德国数学研究圈的领袖。他写道："我不是克莱因的学生，克莱因也不是我的学生，虽然那更贴近真相。"

当李转到莱比锡大学时，他并没有辞去克里斯蒂安尼亚大学的职位，他只是休假，六到八年以后，他准备返回了。他写信给挪威的朋友："我无法用言语来描述我是多么期待回到挪威。我的神经系统在莱比锡大学大受损伤，在这里我错过了锻炼和享受自然灵气的机会。"得知他的想法后，挪威政府为他在克里斯蒂安尼亚大学专门设立了一个关于变换群理论的教授职位，并提升了薪金，以确保回国对他不造成任何经济损失。那是在1894年，但李直到四年以后才离开莱比锡大学接受这个职位。他在1898年秋季学期开始授课，但几个月以后不得不中止。那时已经知道他患上了恶性贫血，这在当时是致命的，他的情况很快恶化了。李在1899年2月18日去世，享年56岁。

多年以后，克莱因的遗孀安娜(Anna)如此回忆他最后的那些岁月：

我夫君与李的关系在数学上和在私交上都是亲密的。一直持续到很晚的时候，当李来莱比锡大学拜访我们时都是如此。我也很喜欢他，这个精神威武的挪威人，带着直率的眼神与令人愉快的笑声，这个英雄出现时凡夫俗子都不敢冒然露脸。后来他成为我夫君在莱比锡大学的

继任者,他在那里犯了思乡病。我对此是多么理解!他这个习惯了他那粗犷而美丽的北方家乡的自由人,怎么能忍受这个烟雾弥漫的城市,这些高楼大厦与狭小街道,还有孱弱的撒克逊人?他得了抑郁症,并被送到一所疗养院,但情况只是变得更糟,因为这剥夺了他的工作和自由。正是在这种痛苦的状态下,他写下了一些恶毒的东西,令我夫君很痛苦,并感到无法理解。但很快我的夫君认识到,他最好的朋友病了,无法对他的所作所为负责。我夫君没有陷入任何争论而仅仅是把它撂在一边,这不仅仅是宽宏大量和善良,这也是明智的。他没有误解他的朋友。某个夏夜,当我们远足归来,发现家门口坐着一个苍白的病人。“李!”我们惊喜地呼唤。两位风烛残年的老友两手紧握四目相对,自从上次见面后所发生的一切都烟消云散了。李跟我们待了一天,这位亲密的朋友,已经变了。我无法不带感情地想起他,想起他的悲惨命运。不久以后他去世了,但在那之前,他在挪威得到了国王般的礼遇。

第六章

从康托尔到希尔伯特

我们接下来要讲述的6位数学名家生于1845—1862年的18年间。其中2位来自德国,另外4位分别来自丹麦、法国、俄国和瑞典。

康托尔(1845—1918)

约19世纪后半叶,学界就数学的基础提出大量想法,特别是在德国。格奥尔格·费迪南德·路德维希·菲利普·康托尔(Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor),作为超限集合论的奠基人,使得这一领域的数学思想发生了革命性变化。可是,他那些观点的全面影响直到20世纪才被注意,而在他有生之年,这些理论尚极具争议。他辞世之后,希尔伯特曾说道:"康托尔造就了一片乐土,无人能将我们从中驱逐。"现今的绝大多数数学家都赞同此话。

格奥尔格·沃尔德马·康托尔(Georg Woldemar Cantor)出生于哥本哈根,但幼年时便移居圣彼得堡,并在那里成为了一名成功的券商。他的妻子玛丽亚·安娜[Maria Anna,娘家姓博姆(Bohm)],来自一个优秀的音乐世家。他们的儿子小康托尔于1845年3月3日降生,是六



个孩子中的长子。康托尔在浓厚的宗教氛围中长大:他的母亲是罗马天主教徒,而他的父亲则有犹太血统,在一个路德宗教区中被抚养成人,是名坚定的新教徒。在为儿子举行坚信礼之际,这位敏感而有天赋的父亲,写给小康托尔一封令他永生难忘的信。信中预示了许多此后数年他将要面对的情形:

没有人预先知道,在一生的各类境遇中,他会偶然身陷何种令人难以置信的困境与职业环境,以及必须迎战何种未能预料乃至无法预料的灾祸与磨难。在接触实际事务之后,那些天之骄子常常会在他们首个重要的竞争中被打败,而自己只做了微弱反抗。他们勇气耗散,此后彻底畏缩不前,最多也不过是个荒废之才而已。而他们缺乏的是恒心,这是一切之前提!现在,我亲爱的儿子,请相信我,你最诚挚、最忠实和最有经验的朋友——这份我们必须葆有的确然而稳健的心境,是一种真正神圣的精神。

同样,由于我们在自己的专业或事务活动中有着对成功的热切渴望,那些明里暗里的对手必然会对我们产生嫉妒或诽谤,为了避免所有诸如此类的艰辛与磨难,为了战胜它们,我们首先需要最大可能地学习并掌握最为基础、多样的技术知识与技能。现如今,一位勤奋的有志之士若不愿被对手排挤而落于人后,这些东西是不可或缺的。

1856 年,当小康托尔 11 岁时,他们举家从俄国迁居德国。他们先在威斯巴登定居,15 岁时康托尔进入文理中学就读。他展现了多方面的才能,但是数学和科学是他的强项,因此,他的父亲决定将他培养成为一名工程师。为此,康托尔开始在苏黎世工业学院攻读本科,但他那已不久于世的父亲同意让他转学至柏林大学并转攻数学,因为在工程

学方面他是一个好学生，但并非尖子生。

发表《论二次不定方程》（De aequationibus secundi gradus indeterminatis）前，康托尔在格丁根大学进修了一个学期。到 22 岁时，他已经开始饱受抑郁症发作之苦，而在他之后的人生里症状愈趋严重。在 1867 年取得博士学位后，他在中学短期任教，之后在距莱比锡大学不远的哈雷大学担任编外讲师。幸运的是，他富有的父亲留给他足够的财产，而他用了五年时间成为副教授，又过了七年被提拔为正教授。尽管薪水并不很丰厚，他余下的职业生涯仍然都在哈雷大学度过。

通常康托尔是一个和乐的人，他会打趣自己"更有艺术倾向"，有时他会对父亲没有让他成为一个小提琴家而表示遗憾。他在 1874 年与妹妹的好友瓦利·古德曼（Vally Guttman）结婚，并育有六个孩子。康托尔夫妇在哈茨山脉度蜜月时邂逅了戴德金，此后他成为康托尔的挚友和数学上的知音。

当康托尔来到柏林大学的时候，他开始对数论产生兴趣，并且得到了克罗内克的注意。然而，等他在哈雷大学稳定下来以后，他的兴趣转向了三角级数理论，尤其是给定方程的傅里叶展开的唯一性问题。这使他对以有理数为例的可数无穷集，以及以实数为例的连续集之间的区别展开了深思。在这个阶段，康托尔的想法与戴德金非常相似。然而戴德金以有理数分割来构建实数，而康托尔以有理数的柯西收敛序列来构建实数，两者在应用时都同样有效，但是在归纳时则有不同的可能性。尽管波尔查诺（Bolzano）是数学的这个领域里的一位有趣的先驱，康托尔却是集合论的奠基人。而戴德金也许更应该被称之为现代代数的奠基人。

在当时，实数是否可数仍是个未解之谜。到了 1873 年 12 月，康托尔终于能够写信给戴德金，表示他可以证明实数是不可数的。众所周知的对角线论证随后面世。这个重大发现之后又紧跟着另一大发现。实际空间是三维的这一古老而广为接受的概念，相对而言没有争议。但出现了涉及四维乃至更高维的"多维空间"的意义问题，几何学家们

在直观的基础上接受了维度的概念。康托尔证明这还不够好,他构造了线段和正方形之间的一一对应关系,以及更高维中的类似结果。康托尔本人对此也十分惊讶:“我发现了,但是我无法相信!”他惊叹道。这个结论似乎颠覆了维度的整个直观概念,而直观恰恰是维度的一大凭据。当然,重点在于在同胚下维度是不变的,也就是说不仅函数本身必须是连续的,而且其反函数也必须是连续的。直到近40年后,这个不变性才最终得以确立,但康托尔的结论显示了直观概念在这个领域也可能颇具误导性。

康托尔在1879—1884年期间发表了一系列论文,对我们现在所称的超限集合论展开了更具革命性的思考。其中的第五篇论文作为一份独立的小册子发行,题为《一般集合论基础》(*Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*),成为了康托研究工作的里程碑。其开篇为:

截止目前,我的研究表明,集合论已经达到了一个高度,它的进展取决于对当前限制下整数概念的扩张。就我所知,目前还没有任何人对这个扩张有所涉猎。我对这种数的概念的扩张极为信赖,以至于没有它,我在集合论的研究进程中将寸步难行。如果必要的话,此种情况可以被视为一种解释,或者借口,用以说明为何我在自己的研究中引入了似乎无关的概念。名义上,我在思考一种超越其极限的各自连续的整数序列的扩张。虽然看似大胆,但我可以声明,不单单只是期望,而且是坚定地相信,这个扩张在不久的将来会体现得相当简单、合理和自然。我十分明白,由于这份坚持,我会与大众对于数学极限所持的观点和对数的本质的普遍说法相对立。

在《一般集合论基础》中,拓扑性质的概念首次出现。诸如稠密子集的定义、闭包的概念等都是由康托尔首创的。之后这些概念对弗雷歇(Fréchet)1906年发表的关于抽象空间的研究报告,以及豪斯多夫

1914 年出版的经典的《集合论基础》(*Grundzüge der Mengenlehre*)起到了重要的作用。

整数的超限扩张只是这个规划的第一步。不管怎样,为了使理论更加完善,康托尔认识到连续统假设的必要性,但是对此的证明却败坏了他的最大努力。当然,现在人们对其中逻辑观点的理解已经大有好转,但是数学系的学生们仍然会在第一次接触到这个理论时感到拿捏不定,必竟它由康托尔首次发表时便极富争论性。希尔伯特形容康托尔的超限数理论为人类精神最伟大的成就之一。

当康托尔革命性的理论横空出世时,它们遭遇了普遍质疑,并且这些质疑通常伴随着敌意,特别是克罗内克,他试图阻止或至少推迟康托尔发表论文。康托尔本来希望可以回到数学氛围更浓郁的柏林大学,但是克罗内克不遗余力地阻止了他。其他如克莱因和庞加莱等有影响力的数学家也并未对他施予同情,但凡事总有例外。其中之一是瑞典数学家米塔-列夫勒,本书下一节的主角,《数学学报》(*Acta Mathematica*)杂志的创办者,他愿意在其他杂志拒绝康托尔的情况下发表他的论文。康托尔的几份原先以德文发表的重要论文,在 1883 年被翻译成法文,并在《数学学报》上重新发表。据米塔-列夫勒所说,翻译者为埃尔米特的学生们,其中一位是庞加莱。康托尔在 1884 年访问巴黎大学时发现,法国的顶尖数学家们对他的研究成果有更高的接受度,尽管这些成果被批判为空有形式而无实质内容。

米塔-列夫勒没有准备发表康托尔更偏向哲学的文章,并开始对他的一些数学成果也产生了犹豫。1885 年,康托尔想要在《数学学报》上发表两篇关于序数的新观点的短文,但是米塔-列夫勒委婉地提出了反对意见:

我很确信在你能够确切地解释你所得到的全新结论前发表你的新成果,会在很大程度上摧毁你在数学家之间的声誉。我非常清楚这对于你来说毫无所谓。但是一旦你的理论被如此贬低,这些成果可能会

需要很长的时间才能再次得到数学界的注意。你和你的理论很有可能在你的有生之年都无法被正名。这个理论在百年之后或会被其他人再次发现,随后人们会发现你早就创立了这个理论。那么,至少到那时你会得到公正的评价。但是如果你这么做的话(即发表论文),你不会引起巨大的反响,而这恰恰是你所希望的,和每个进行科学研究的学者一样。

这里还有一封写给米塔－列夫勒的诙谐信件(信是在后面章节会提到的柯瓦列夫斯卡娅写的),信中描述了康托尔尝试教授莱布尼茨哲学课的场景:“一开始他有 25 个学生,随后渐渐地变少,先减到四个,然后三个,再然后两个,最终只剩下一个。尽管如此,康托尔仍然坚持讲课。但是,唉!终于有一天,‘最后的莫希干人’因一些问题,大力感谢了教授,但同时解释他实在有太多其他事情要做而无法继续学习教授的课程。此后,康托尔郑重承诺永远不会再给别人上哲学课!这对他的妻子来说则是无法言喻的喜悦。”

有许多人,包括庞加莱都对康托尔的点集论表示欣喜,但是对于康托尔的超限数理论的完全普遍性则持保留态度。在《一般集合论基础》出版后的 10 年里,康托尔因大众对其理论的嘘声而气馁,并背弃了数学。他在哲学刊物上发表文章,他的信件揭示他关注的重点转向了与蔷薇十字会和共济会相关的事务,以及诸如证明培根是莎士比亚戏剧作者之类的文学问题。

当康托尔回到数学研究中时,他完成了另一部重要著作《超限集合论基础》(*Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*)。第一部分是关于全序集的研究,于 1895 年出版,第二部分是关于良序集的研究,两年后才出现,尽管它们似乎是在同一时间完成的。在这些研究工作中,他考虑了诸如选择公理之类的问题,该问题后来变得非常重要。

在提纲挈领的《超限集合论基础》出版后,其法文和意大利文译作

几乎同时出现,康托尔的思想变得广为人知,并在全世界的数学家圈子里传播。他的超限集合论的价值很快得到承认,不久康托尔的思想在数学观点分歧严重的阵营之间引发了无比激烈的争论。部分为了尝试给他那有争议的思想争取一个公平的解释机会,康托尔1889年着手筹备德国数学学会。此时其他数学家也开始接纳康托尔的思想,在弗雷格(Friedrich Ludwig Gottlob Frege)及后来的哥德尔(Kurt Gödel)的帮助下,他提出的深奥问题的含义变得容易理解了。

尽管他的学术研究似乎从未能使他避免身处风口浪尖,但是在1895年以后,他的理论被越来越多更年轻、更有活力的数学家所拥护。他不用再独自面对那些反对意见。尽管克罗内克仍然以相似的说法保持批判态度,康托尔却可以开始列举出一大批准备支持超限集合论的数学家了,而且支持他的人呈递增趋势。对康托尔来说,革命已接近成功,尽管理论上的困难尚未圆满解决,但是他对数学界作出的永恒伟大贡献已经赢得了赞誉。数学已今非昔比。

康托尔的后半生被精神疾病的间歇性发作所困扰。与许多天赋异禀的人一样,他有躁狂抑郁症。在那个时期,躁狂症状比抑郁症状更容易引起注意。第一次严重发作发生在1884年,在康托尔从巴黎大学返回哈雷大学之后。当他恢复后他立刻做了一个尝试,真心诚意地想要和克罗内克达成和解。1899年,康托尔经历了又一次精神崩溃,因为他最年幼的儿子,一位才华横溢的青年,在快到13岁生日之际突然离世,致使整个家庭陷入了无尽的悲痛中。随着病情越来越反复,1904年后康托尔一直在疗养院接受治疗。1918年1月6日,他在哈雷大学附属精神病院去世,享年73岁。临近他职业生涯的尾声时,他的成就被赋予了学术界及科学界的各类荣誉。1928年,一座半身塑像被放置在了哈雷大学。可惜的是,他的许多信件和论文在第二次世界大战期间遗失了。

康托尔职业生涯的许多方面都在文献中被扭曲,而近期为他写传记的作家发现很难去纠正一些事情。尽管康托尔先前在柏林大学时的

一位导师克罗内克确实说过康托尔是“一个科学骗子，年轻一辈中的叛教者和堕落者”，但接下来的部分却并不尽然，“这些恶意的攻击所带来的结果就是，康托尔经历了几次精神崩溃，而他人生最后的五年则是在精神病院里度过的”。然而，据康托尔新的传记作者所述，根本就没有所谓的“带来的结果”；相反有确实的证据证明康托尔的精神疾病是先天性的，并且与克罗内克对他的数学研究的反感毫无关系，尽管大家都认为如此。而且，尽管有说法称康托尔的理论因为一些“完全没有预料到”的反对声而被推翻，康托尔却从一开始就清楚意识到会出现这种“奇谈怪论”，只不过可能在很久之后他才开始意识到它们带来的全面影响。

米塔 – 列夫勒(1846—1927)

格斯塔·米塔 – 列夫勒(Gosta Mittag-Leffler)这个名字已经被多次提及。他是新的斯德哥尔摩大学的第一位教授，也是极具权威的国际性刊物《数学学报》的创办人。尽管并没有位列顶尖的研究型学者行列，然而他确实是当时数学界极具影响力的大人物。他被称为瑞典数学之父。

米塔 – 列夫勒是约翰·奥洛夫·列夫勒(Johan Olof Leffler)和古斯塔瓦·威廉明娜[Gustava Wilhelmina，娘家姓米塔(Mittag)]的长子。他于 1846 年 3 月 16 日在他父亲任教的一间旧校舍里出生。他的父母后来又育有三个孩子，他们都天赋异禀，后来成为著名的作家安娜·夏洛特·埃德格伦 – 列夫勒(Anna Charlotte Edgren-Leffler)、语言学家弗里茨·列夫勒(Fritz Leffler)和土木工程师阿图尔·列夫勒(Artur Leffler)。瑞典的列夫勒家族最初来自于西里西亚的布雷斯劳，他们中有人在 1655 年移民到了瑞典，并建成了一个庞大的家族。我们未来的数学之星的祖父是哥德堡的一位修帆工人，也是瑞典国会的一名议员。他的母系也来自于德国。他的外祖父是一位著名的牧师。米塔 – 列夫



勒与他的外祖父母有着深厚的牵绊,他把米塔这个姓氏加到了自己的名字当中也表明了这一点。

米塔-列夫勒的父亲当时被提任为斯德哥尔摩一所学校的校长,而且曾有一段时间兼任国会议员一职。他有很广泛的朋友圈,并且他的住处也为孩子的成长提供了一个很好的社交环境。在学校里,小米塔-列夫勒展现了数学方面的天分,以至于当他在斯德哥尔摩读中学的后三年可以免修数学课。紧接着他进入古老的乌普萨拉大学学习。他从那时开始写的日记,记录了一个受过良好教育、富有交际能力、拥有广泛的兴趣和日益增长的雄心抱负的年轻人。与其他有类似情形的人一样,他担任家庭教师来养活自己。他的许多学生都是当地贵族的孩子。虽然他在 1872 年发表的论文平平无奇、不受瞩目,但至少为他挣得了一个讲师的职位。

米塔-列夫勒的职业转折点发生在他 27 岁那年,他被授予拜占庭奖学金。该奖学金由一位居住在瑞典的君士坦丁堡人捐赠,为受助者提供三年海外高等学校留学的经济支持。米塔-列夫勒首先在 1873 年 10 月去了巴黎。他在那里的主要联系人是埃尔米特,他参加了埃尔米特关于椭圆函数的讲座,但是发现在理解上有些困难。埃尔米特热血沸腾地谈到了柏林大学,终于有一天,米塔-列夫勒下定决心接下来要去普鲁士的首都。同时他开始结识其他的法国数学家,并开始享受在巴黎的社交生活。

米塔-列夫勒接下来的一年是在柏林大学度过的。当时普法战争刚刚结束,法国惨败。在巴黎反德情绪严重,但是在柏林,德国人却志得意满。之后米塔-列夫勒在一个讲座中提到:"当我到访柏林和巴黎两个首都时,对当时柏林和巴黎学术圈之间的尖锐矛盾印象深刻。因此,我对埃尔米特和魏尔斯特拉斯能够完全不被民族主义情绪或个

人情感所影响这件事情感到非常震撼。”对米塔-列夫勒当时在柏林大学经历的描述已在魏尔斯特拉斯的传记中被引用过。他发现魏尔斯特拉斯的椭圆函数相比他在埃尔米特的课堂上所听到的理论是一个很大的进步。他迅速与克罗内克和魏尔斯特拉斯建立了良好的关系，特别是后者，自那时起他认定自己是魏尔斯特拉斯的追随者，学习他将幂级数在函数论中系统运用的方法。

1809—1919年期间，芬兰在俄国政府的统治之下。1875年，米塔-列夫勒仍然在柏林大学，他听说芬兰的赫尔辛基大学有一个职位空缺，他决定申请这个职位。当他把他的意向告诉魏尔斯特拉斯时，后者告诉他在柏林大学也有一个相似的机会，并且力劝他转而申请那个职位。尽管非常清楚地认识到柏林大学远远超越赫尔辛基大学，汇聚着数学界的精华，但是他认为即使有魏尔斯特拉斯的支持，这个职位的竞争仍然太过激烈。而且米塔-列夫勒觉得普鲁士的沙文主义实在让人难以忍受，所以他最终决定申请另一个职位。

尽管无法达到位居前列的德国大学的标准，赫尔辛基大学在当时也仍然是一个受人敬仰的数学中心。那里的领军教授林德勒夫(Ernst Leonhard Lindelöf)审阅了米塔-列夫勒与教授职位的申请书同时提交的关于椭圆函数的论文。林德勒夫认为他是四位申请人中最好的，但是有一个语言要求：大学教师必须懂芬兰语。但凡事总有例外，米塔-列夫勒被正式录用了。在赫尔辛基大学他有很多学生，其中一些学生之后随他去了斯德哥尔摩大学。除去教学任务，他十分享受在芬兰首都的社交生活，并且不久后他迎娶了年轻的西格纳·阿夫·林德弗斯(Signe af Lindfors)，她是芬兰庞大的瑞典人社区中一位权贵的女儿。

瑞典最古老的大学乌普萨拉大学，成立于1477年，当时瑞典北部仍然隶属于丹麦。1658年，这块领土回归后，第二所大学在隆德成立，而直到200年以后才在斯德哥尔摩成立了第三所大学，并且在那时斯德哥尔摩代替了乌普萨拉成为了瑞典的首都。这所崭新的高等学府成立于1880年，与另外两所大学不同，它在某种程度上由私人资助。最

初它是一所专科院校，比起全科大学来，它在某种程度上更像一个研究所，而且起初没有入学考试。米塔-列夫勒是这所学校委任的第一位教授。

他的首批举措之一就是创办了研究刊物《数学学报》。这件事情最初是由李发起的，他当时在莱比锡大学。李的最初构想是这本刊物的编辑委员会和主要投稿者将来自于芬兰和斯堪的纳维亚国家。然而当米塔-列夫勒介入进来之后，便决定编辑委员会设在北欧，一如当初李的提议，但至于投稿者如果能够从更大范围里挑选的话会好很多。1882年，为了让《数学学报》顺利创刊，米塔-列夫勒设法获得了庞加莱关于富克斯群的重要研究报告，关于这点后面还会提及。奥斯卡二世国王本人也是位数学家，为这新兴事业注入了资金，而《数学学报》也很快获得了足够的订阅者以确保它的前景。

众所周知，米塔-列夫勒在柏林大学的时候从魏尔斯特拉斯那里听说了俄国数学家柯瓦列夫斯卡娅。1876年，当她在圣彼得堡时，米塔-列夫勒去拜访了她，并为她的灵性、魅力和数学学识感到震惊。四年后他们在第六届俄国科学大会上再次相遇，当时他们都进行了演讲。柯瓦列夫斯卡娅想尝试从事与数学相关的工作，并咨询了米塔-列夫勒在赫尔辛基大学获得一个职位的前景。他很快发现她的俄国国籍，以及她作为活跃的激进分子的名声，这些使得情况并不乐观。尽管如此，当他在斯德哥尔摩大学建立起自己的事业时，他便马上开始为她安排入职与他共事，直到1884年他做到了。之后发生的事情会留到她的章节里讲述。

让我们回想克罗内克的传记，为了纪念瑞典国王的60岁诞辰，曾经举办过一次特殊奖项的比赛。任选四个既定课题中的一个撰写数学论文，最佳论文将赢得奖项。其中三个课题与椭圆函数和超椭圆函数有关，而第一个课题则是关于天体力学中三体问题的。众望所归，庞加莱参加了比赛。他以《论三体问题及动力学方程》(On the three-body problem and the equations of dynamics)为题参赛，虽然根据规定以匿名

形式提交，但是因为行文的风格和论述手法而非常易于辨认，论文获得了奖励并且准备出版。然而后阶段却在庞加莱的论文中发现了严重的错误，因此非常尴尬地由作者出资进行修改。事实上这笔费用比庞加莱获得的奖金还要高。

在当时，米塔－列夫勒尽管并非人尽皆知，但也已经成为了国际名家。实业家诺贝尔(Alfred Nobel)预备成立一个冠以自己姓氏的奖项，而一份集生物学、化学、物理学等等候选奖励学科的列表被交由他来审阅。其中一门学科是数学。诺贝尔询问如果有诺贝尔数学奖的话，米塔－列夫勒是否将会是合格的获奖者。当他得到肯定回答时，诺贝尔剔除了数学学科，因此诺贝尔数学奖从未出现过。

米塔－列夫勒沐浴在各种学术荣耀中，包括超过40个学会和协会的荣誉会员。作为国际关系的热衷者，他是之后一系列国际大会的发起者之一。米塔－列夫勒的家族很富裕；不仅仅因为他的妻子西格纳为他带来了财富，他自身也是一位十分成功的企业家。1916年，当他70岁时，他们向瑞典科学院捐献了他们的房子和图书馆，以及一大笔捐款。其目的是为了建立一个在机构负责人的领导下，使数学得到长远发展的机构，而这位负责人最初就是米塔－列夫勒本人。不幸的是，由于战争带来的经济影响，原先的那些捐赠变得微不足道，但最终米塔－列夫勒研究所仍然成功建成了。

这位瑞典数学之父于1927年7月7日去世，享年81岁。在他成年后的这一生，是由对数学纯然的热情和对同时期伟大数学家的敬仰而驱动的。在研究方面他专攻复分析，发表了上百篇学术论文，并且他还是一位成功的教师和企业家。李形容他为一位数学外交家。在瑞典，他是一位重要的公众人物，也是国王的幕僚。当他走进议事厅，整个观众席都起立致敬。

克莱因(1849—1925)

克里斯蒂安·费利克斯·克莱因(Christian Felix Klein)比起米塔-列夫勒来更像是一位数学政治家。克莱因青年时期在研究界就已小有名气,但是他发现行业竞争过于激烈。于是在他还相当年轻的时候,他开始认为他真正的职业应该在所谓的科学决策领域。在埃尔兰根大学时,他不仅在他的一个著名项目中陈述了对几何学的统一定义,而且还略述了他对于数学教学改革的一些想法。首先在莱比锡大学,后来关键是在格丁根大学,他用重建数学和其应用领域间的紧密联系来振兴这门学科。他的影响力在德国是超群的,而且对该学科在美国的发展也有一定的影响。他在演讲和文章的阐述功底上,都有着极高的水准。



在杜塞尔多夫的莱茵兰,1849年4月25日夜,"市长秘书的房子里弥漫着焦虑。屋外,街道上充斥着起义的莱茵兰人向他们所憎恨的普鲁士统治者发射炮火的声音。屋内,尽管众人已经准备好撤离,却没有任何人有心思动身;当夜,坚毅的普鲁士市长秘书的儿子诞生了。那个孩子就是克莱因。"这位19世纪数学界领军人物之一的一生就此展开。

接下来的20年里,普鲁士王国宣示自己的主张,即成为欧洲的主心力量,骚乱几乎持续不断,最终在普法战争中达到高潮。然而小克莱因的成长之路颇为普通,在杜塞尔多夫读完文理中学以后,于1865年就读波恩大学,主修自然科学。两年后他转去了物理科学系,在那里他师从数学及物理学大师普吕克,直线几何学理论的奠基者。随着普吕克的早逝,克莱因成为了克莱布什的弟子,但之后克莱布什转去了格丁

根大学。克莱因准备发表一些普吕克留下的研究论文,而同时他正在利普希茨(Rudolf Lipschitz)的指导下撰写博士论文。在波恩大学通过了博士论文答辩之后,克莱因去了格丁根大学拜访克莱布什,而在那里他遇见了克莱布什带领的生气勃勃的研究团队。

接下来,克莱因拒绝了克莱布什的建议,在1869—1870年待在了柏林大学。尽管那些柏林大学的领军人物们,包括魏尔斯特拉斯、库默尔和克罗内克都对几何学不太感兴趣,但当时他们正一起工作。柏林大学的研讨会主要致力于改进数学教学。对有抱负的研究生和博士后学者来说,柏林大学已经成为了进修高等数学的"麦加"圣地。

在克莱因到达柏林大学时,康托尔、弗罗贝尼乌斯、基林(Killing)和米塔-列夫勒也是那里的学生。他并没有从这才华横溢的团体中脱颖而出。据米塔-列夫勒所说,克莱因几乎没有从克罗内克和魏尔斯特拉斯的授课中获益。众所周知,他反而与当时也来访问柏林大学的索弗斯·李建立起了友谊。"在这些年轻数学家中,我和一位对我来说非常有吸引力的人相识,"克莱因在给母亲的信中写道,"他就是李,一位我早就从克里斯蒂安尼亚的出版物上知晓名字的挪威人。我们都因同样的事情而忙碌着,所以我们从不缺少话题。另外我们不单单只因同样的爱好而结交,还由于这里的数学家们为了维护自己的主张和风气,我们遭到了他们针对他人特别是外国人成果的排挤。"克莱因在库默尔的研讨会上谈论到了李的成果。

如我们所见,1870年春天,他们一起在巴黎。"我们毗邻而住,并且主要通过私下交流寻找科学灵感,特别是和年轻的数学家们",根据克莱因所写,我们得以窥见他们一起生活的一些画面:

我在1870年7月的一个早晨起了个早,刚准备出门,当时李仍然躺在床上,他把我叫进他的房间,开始向我解释他昨晚的发现,曲率线和极小线之间的联系。我完全不懂他在说些什么。不管怎样,他向我保证,可以得出库默尔曲面上的极小线一定是第16阶的代数曲线。那

个早上,我在工艺博物馆查看时突然发现,这些曲线必然与我的一次和二次线丛理论中已出现的第16阶曲线是相同的,并且我立刻就成功地完成了几何证明,完全没有依赖于李的变换。下午我回到家里,四点的时候,李刚刚出门,我给他留了封信,信的内容是我的论证。

当普法战争爆发,克莱因回到德国服兵役。他被指派到救护部队,在那里他感染了斑疹伤寒症,然后被送回了家。第二年,在普鲁士赢得了战争的胜利之后,他得以恢复和李的合作。当时他在格丁根大学担任编外讲师。德国和其他地方都在争论近期发展的非欧几里得几何学的正确性。克莱因论证了这些可以由投影几何学结合欧几里得几何学而得到模型。鉴于没有人会质疑欧几里得几何学的正确性,所以尽管仍然存疑,这重要的见解有助于证实非欧几里得几何学的正确性。

1872年克莱因被任命为埃尔兰根的巴伐利亚大学的正教授。外向机敏的克莱因与他的前辈默比乌斯对比鲜明。克莱因已作为一位杰出的讲师而享有盛誉。他总是为讲课做最严谨的准备,并且事先精心准备好板书内容,因此,当他结束讲课时,黑板上会有他所说的所有内容的总结。虽然如此,他的第一堂课却只有两个学生来听讲;之后两人中的一人偶尔出席,而另外一人却再也没出现过。

作为在埃尔兰根的大学就职的常规做法,克莱因需要进行就职演讲。为此他选择了数学教育为主题,尽管之后随着年岁渐长他的见解更加精进,但当时的他对此已经颇有想法。然而埃尔兰根的大学的特例是,他还需要给出一个文字性纲领。他将它题名为《比较回顾近代几何学研究》(Vergleichende betrachtungen über neuere geometrische Forschungen),而之后这成为了著名的埃尔兰根纲领。当时各种几何学,欧几里得几何学、椭圆几何学、双曲线几何学、射影几何学等等,都是分开进行研究的。克莱因建立了一个与之前的格局相比要更为广义和抽象的几何学的统一概念。尽管他的理念给予几何学研究一个全新的动力,但是对定义几何学的尝试却从未真正成功过。50年以后,维布伦

在深思过此事后,简言道:“从情感与传统的角度上,对一大群有能之士来说,似乎由于这名字听来不错,因此将数学的一个分支命名为几何学。”

埃尔兰根纲领被称为是克莱因个人最重要的数学成就。诚然,在之后的 20 年里,这只是一份在埃尔兰根流传的小册子,还没有为众人所知,而在那段时间里,一些数学家,尤其是庞加莱,也不约而同地有了相似的想法,而那些人则更有影响力。之后李从巴黎给克莱因写信道:“庞加莱在某次提到,所有的数学都只是群的概念而已。我告诉了他你的埃尔兰根纲领,而他对此并无所知。”李和他的学校比克莱因更实质性地参与到这关于结构性的思考中,而这成为了 20 世纪数学的表征。最终克莱因发现,如同李和庞加莱所提到的一样,群的概念是一个伟大的统一原理,但他在初期的纲领里还没有这么做。

对克莱因来说接下来的三年他在研究领域收获颇丰。1875 年,他被点名去慕尼黑工业学院继任黑塞的职位,而这于他又是另一个多产的五年,那段时期他发表了近 70 篇论文,其中有一些在之后成为经典。这些论文涵盖了群论、代数方程和函数论,均以几何学的角度出发。相对于他在埃尔兰根讲课时的门庭冷落,慕尼黑的学生们却蜂拥至他的课堂听课。

“克雷尔杂志”由柏林大学的数学家们编辑,在那时已有近 40 年历史。克莱因的恩师克莱布什去世之前,他与同事卡尔·诺伊曼(Carl Neumann)共同编辑,创建了《数学纪事》。1876 年,克莱因也加入了编辑部。之后他成为了主编,而在他手中《数学纪事》的声誉开始超越由克雷尔创建的柏林学派期刊。当克莱因在 1880 年得到莱比锡大学的一个新几何学教授职位时,他毫不犹豫地接受了,尽管这所大学的数学系并未位列一流。克莱因留驻六年后,学校的声誉已完全转变,而克莱因也被视为德国数学界冉冉升起的新星。

庞加莱比克莱因小四岁。1881 年,当克莱因到达莱比锡大学,那个年轻的法国人正在进行他伟大的富克斯函数开发之旅。克莱因邀请

他为《数学纪事》写一份综述。庞加莱对当时此领域中德国学派的研究并不熟悉，但是在克莱因的帮助下他对此迅速有了了解。在接下来的一年里，比起合作他们倒更像是在竞争，他们分别在单值化问题的基本原理上有了建树，非欧几里得几何学在其中起到了最主要的作用。在米塔－列夫勒的邀请之下，庞加莱在《数学学报》的第一期上发表了他研究成果的一系列五篇文章，而克莱因却略先于庞加莱发行了他研究成果的预印本。李从巴黎大学给克莱因写信道："庞加莱说一开始要读懂你的文章非常困难，但之后却变得非常容易。一些数学家，例如达布和若尔当，他们说由于你经常不提供证明，这对读者要求非常高。"

除了那本精致的小册子《二十面体和五次方程解法教程》(*Vorlesungen über das Ikosäeder und die Auflösung der Gleichungen von 5 Grade*)，庞加莱在之后的两年里总比克莱因领先一步出版其著作。尝试与庞加莱竞争给克莱因的精神健康带来了巨大的压力。在嗜睡症和忧郁症中挣扎的同时，他越来越感到被莱比锡大学的同事们所疏远。这个艰难的情况到了1884年终于结束，由于西尔维斯特的离职，克莱因收到了美国霍普金斯大学的职位邀请。尽管对此非常感兴趣，但是最终他决定放弃。然而这个邀请在精神上给了他一定的刺激，促使他对自己未来的职业进行了思考。克莱因最终意识到与其在研究的最前沿竭力与人竞争，还不如在其他领域作出贡献。

德国数学界对于克莱因的接受过程一直很缓慢。特别是柏林学派始终对他将信将疑。米塔－列夫勒在1881年给埃尔米特的一封信中写道："你问我克莱因与伟大的柏林学派的关系……魏尔斯特拉斯发现克莱因并非缺少天赋，但是他非常流于表面，甚至有时更像一个江湖骗子。克罗内克觉得他就是个骗子而没有任何功勋。我相信这也是库默尔的看法。"甚至到1892年他们的意见仍然没有改变，教委会以"舌灿莲花的骗子"和"汇编者"为理由建议拒绝他作为魏尔斯特拉斯的继任者。甚至是李，克莱因的伙伴和盟友，也委婉地说道："我认为克莱

因极具天赋,并且我会永记他宽容地对我一切科学实验所作的陪伴;但我认为他不能让人信服,例如,他没有对证明作出足够的区分归纳,并对某个新发现的概念作出说明。”

克莱因对柏林学派通过校友的网络关系,不但在德国甚至在国外都能散播影响力的方式所惊叹,但是他又谴责柏林学派的“傲慢”导致了德国几何学研究的匮乏。在他们的基础教学中,波恩大学和格丁根大学的情况是以空间直觉和实际经验为诉求,而受柏林学派影响的大学则是为了其本身的利益而研究数学,所以他们的数学专长更带有目的性。而到了19世纪末,柏林大学的统治地位开始遭受质疑。部分原因是其过于学术的数学教学,而当时建立了一些训练工程师的技术专科学校。不久之后这些学校中的佼佼者直接与大学展开竞争。其中的一些是从高等学院演变而来,而其他的一些比起大学来,从角色上来说更像高中。

1886年克莱因终于等到了机会,他转去了格丁根大学,那里成为了他的权力基地。他本身就已经对柏林的文化部有些影响力,他们出台了一条政策来加强格丁根大学的科学科目。克莱因服兵役时的一位战友,现在为大学处理任命事宜。据悉,克莱因可以成就也可以毁掉一位年轻数学家的职业生涯。他有着不可思议的辨识特殊才能的天赋,但对于委任工作而言他需要寻求各方面的平衡。之后他获得了极大的话语权,但初时他并不能事事如意。他曾试着从苏黎世带赫尔维茨(Adolf Hurwitz)到格丁根大学,但以失败告终,不过他的第二个人选却使他实现了对格丁根大学的野心,并使之成为了数学界的麦加圣地。

克莱因对年轻的希尔伯特留下了深刻的印象,当时他仍在柯尼斯堡大学并且等待着提升的机会。1894年时机成熟了,克莱因如愿让希尔伯特到了格丁根大学。在之后的20年内,他们一同开发了一种开放式跨学科的学习方式,并很快就使格丁根大学成为比由纯粹数学统治的柏林大学更具吸引力的数学中心。然而柏林大学和格丁根大学之间的敌对关系实在根深蒂固,甚至于延续到了20世纪。

克莱因经常访问英国大学。他对以瑞利勋爵(Lord Rayleigh)的教

科书《声理论》(*Theory of Sound*)中描述的英国式的应用数学的方式表示赞同,此书在1878年发行了德语版本。他有两次短期但是引人注目的出访美国,而其成果的一部分,就是有一批固定的美国数学家跨越大西洋去格丁根大学学习。新创刊的《美国数学学会通报》(*Bulletin of the American Mathematical Society*),甚至曾刊登过格丁根大学和其他欧洲大学的课程讲座。克莱因在美国所产生的深远影响可以追溯到他在1893年与芝加哥世博会一起举办的数学大会中所扮演的角色。尽管随后一系列的国际性数学大会都没有在那里召开,但是这对美国的数学界有很大的影响,我们在下一章节中也会提到。克莱因一直在等待一个适当的时机在美国推广他的理念,而这在西北大学的一次会后讨论会上得以实现。克莱因用英语进行了讲解;与其说是一次讲课,这更像是一次演说。这次演说被通篇出版,而以下的摘要经常被引用:

当我们细数19世纪的数学发展,我们会发现其他学科中也有类似的情况发生。那些当时的著名学者,拉格朗日、拉普拉斯、高斯,每一位都了不起地涵盖了数学所有的分支及其应用。尤其天文学与数学在当时被认为是不可分割的。然而,随着时代的发展,两者分化的趋势逐渐形成……日益发展的科学也同时越来越背离其最初的规模和目的,即将牺牲它早期的统一性,分割成不同的分支。

克莱因继续说道,过去的20年里有一个长足的进步,回归到他所称的高斯总体计划,但必须说明的是,现在与过去有一个明显的差别,那就是曾经由单个智者创建的事物,到现在则寻求由共同的努力与协作来完成。这段话之后,克莱因以类似魏尔斯特拉斯及许多其他人的语气,接着说道,考虑到科学能力,特别是数学能力的竞争带来的影响:

必须承认可能对不同的个人,也许甚至对不同的人种来说,对于空间直觉的精准性都是不同的。可能就像天生的空间直觉是日耳曼民族

的卓越特性，而拉丁和希伯来民族在批判性和纯逻辑感官方面的发展则更为完备。关于这个课题有一个全面的调查，由法国人高尔顿(Galton)基于遗传学研究的建议出发，可能挺有意思。

阿达马从他这个说法推断出，克莱因理所当然地置直觉于逻辑之上，是遵循了日耳曼民族比法国人和犹太人更为优秀。但至少对于犹太数学家的考量，从格丁根大学和其他地方由克莱因提名的各种委任来说，他对他们的能力有很高的评价，并且准备在任何他认为正当的时刻支持他们对抗优质的雅利安民族。然而克莱因经常授权支持纳粹主义的数学家在其得势期间引用他的论点。高尔顿当之无愧是生物统计学的创建者；而优生学是他诸多的兴趣之一。

关于那段时期教育政策方面的伟大辩论被多次记录，不仅是克莱因本人。在数学的文化和技术功能之间有一种与生俱来的紧张感，而在德国，部分问题源于诸如普鲁士的新教教区和诸如巴伐利亚的天主教教区之间处理方式的差异。因版面问题无法在此具体展开讨论，但多年以来，克莱因认为原因是中学的科学教育改革，特别是将微积分引入到主课程当中，另外还有适用于教师和工程师的综合数学课程的发展，数学和其他科学及数学和其应用之间联系的加强，以及建立了科学与工业的紧密联系。他对美国的资源分配及资源的充分利用印象深刻，并且为了使自己的国家能与之匹敌，他发起了一项改革，使德国能够最大化地将数学运用于工业当中，特别是在航空学和流体力学当中。

接近19世纪末，德国的数学进入了重大的转型当中。纯粹数学研究从函数论、不变量理论和代数几何学的传统领域向集合论和点集拓扑学等新领域转型。抽象结构开始令数学家们神魂颠倒。许多新兴的数学，例如张量分析及矩阵代数等，之后都被发现对解决相对论和量子力学问题起到了重要作用。另外，随着第二次工业革命的推进，人们对数学在海事工程、航空动力学和金融学等方面的潜在运用产生了兴趣。在扩大数学运用范围的大环境下，纯粹数学与应用数学的界限开始变

得模糊了，而那过时的新人文主义意识形态也不再引领数学行业。克莱因后来抱怨在他的年轻时代，每位数学家为了解决疑问都必须掌握包括自守函数、阿贝尔积分和基础代数几何的数学知识，而他在后阶段发现那些年轻学者对这整套理论完全提不起兴趣。

克莱因从未在格丁根大学正式担任过什么行政管理职位。诚然，如魏尔斯特拉斯之后写道，克莱因在那里像神一样主宰着数学，但是他的权力来自于他的人格魅力、他的奉献、工作意愿和他成事的能力。在他的手中有一个未成熟的项目，即在格丁根大学建立一个能让数学在实际与理论上都能与应用相结合的学院。物理学院边上的土地已经划拨给了该学院，大楼设计草图已经画好，建造工程已准备动土；可当第一次世界大战开始后，该项目被无限期叫停了。

1913 年，克莱因因为健康原因提前退休，他因自己建成了一个全世界前所未见的数学研究团体而骄傲。退休后他继续在家里授课。他在大学里仍然是教工中最强劲的领导力量，代表大学与企业维持联系，他也是柏林政府部门最具影响力的学术之声。然而，在国际上，他的声誉严重受损，因为在战争开始时，他和许多其他德国学者一样署名支持一本名为《对文化界的号召》(*Call to the world of Culture*)的沙文主义手册，这本手册旨在为德国的好战辩护。在众多署名支持者中，克莱因是唯一的数学家，他一直宣称只是被一通电话询问是否愿意将其名字附在一份实质上不一致的声明中。

战争结束后，他大量削减了自己的行政与组织活动。他的两本作品合集出版。第三本，关于他研究生涯的最高成就，包含了他与庞加莱在 1881—1882 年的通信。在此前几个月，克莱因成功找回了之前他不知怎么丢失的庞加莱那一半的通信。在克莱因事业的末期，他已经不太离开家，而且只能依靠轮椅行动，他参加了庆祝希尔伯特 60 岁生日的宴会，在那里他向他的同事呈献了希尔伯特在 1885 年克莱因的莱比锡研讨会上所作演讲的讲稿副本。年轻的弗里德里希斯(K. O. Friedrichs)，之后被柯朗带去了纽约，他在 1922 年拜访克莱因。“我被

震慑了，为克莱因的风度和魅力所折服，”弗里德里希斯后来又说，“当一切都顺着他来的时候他可以充满魅力并且风度翩翩，但当任何人质疑他时，他就会成为一个暴君。”他们谈论到日前发生的右翼恐怖分子暗杀德国外交大臣事件。“克莱因对此感到十分难过，看得出来这起事件深深困扰着他。他觉得这对共和来说是种恐怖的冲击，他深深担忧着德国的未来。”自此克莱因对当时在德国广为流传的宿命论深信不疑。在不久后的一篇自传中，他写道：“随着时间的推移，我从未如此明白人类能够控制自己命运的可能性那么微乎其微，在我们意愿之外的外部因素总是在干预着我们的命运。”

如果克莱因多活几年的话，他将会看到纳粹摧毁了许多他苦心获得的成就，虽然讽刺的是，他们接纳了他在许多方面的观点。然而他留下了一份经久不衰的遗产，那就是他在推动德国数学教育转型时的号召力及他在美国数学研究团体发展中扮演的角色。尽管是由他的前学生戴克（Von Dyck）担任了多卷《数学科学及其应用百科全书》（*Enzyklopädie der mathematischen wissenschaften mit einschluss ihre Anwendungen*）的编辑工作，但却是克莱因策划了这个巨大的项目，挑选了大部分编辑人员并亲自着手编辑了其中的四卷。显然没有任何柏林大学学派参与其中。克莱因还写了两卷关于 19 世纪数学发展的书籍，其中的一些摘要被引用；他只是偶然提及康托尔，史学家们认为这些话不太公正。他是位评注大师，尽管当时他的多本书因缺少具体论证而被批判。他的叙述风格与寻常的数学写法截然不同。

克莱因身材颀长，精瘦且挺拔，有着浓密的棕色卷发和典型的天蓝色眼睛。1875 年 8 月，当他在埃尔兰根期间，他与美丽的安妮·黑格尔（Anne Hegel），那位哲学家的孙女结婚，他们育有一子三女。不幸的是，他妻子的听力逐渐丧失，但他的听力却非比寻常，虽然他很明显是位音盲。他的晚年因儿子葬身于第一次世界大战的战场而充满悲伤。在克莱因的众多荣誉中，他成为伦敦皇家学会的外籍会员有 40 年之久，并且在 1912 年被颁予最高荣誉科普利奖章。

克莱因的出生伴随着1848年改革的最终破碎，他的一生见证了普鲁士逐渐掌控德国，而他最后的卧病时期也见证了它的颠覆。逐渐地，他愈趋严重的精神疾病不可抵挡地操控并摧毁了他。他认为，部分遗传自他的母亲，部分是因为他自己过分消耗精力——那种力量使他不屈不挠，即使在他人生的最后两年，当他大部分时间只能无助地卧床时，也从未抱怨并且始终保持神志清醒，修订校样。1925年6月22日周一晚上八点半，克莱因平静地离世，享年76岁。

柯瓦列夫斯卡娅(1850—1891)

我们书中的第二位女性数学家是俄国人，魏尔斯特拉斯与米塔-列夫勒的弟子，她传奇的一生在她似乎刚要跨越她面临的职业险阻时过早地终结。这是第一次我们可以如此描述一位女性数学家，尽管她过早离世，但是她因个人的性格及能力，作为研究团队的一员，以女性所从未有过的地位而被众人所接受。在她的时代，欧洲大学终于向女性敞开了大门。



索菲娅·瓦西里耶芙娜·克鲁科夫斯卡娅（Sophia Vasilievna Krukovskaya），未来的数学家，于格里历1850年1月15日出生于莫斯科。她父系的祖先是欧陆俄罗斯西部的平民，但是她的母系家族却是德国有名的知识分子移民。例如她的曾外祖父辈有一位是与高斯、拉普拉斯和其他领先的数学家同时代的圣彼得堡科学院的院士，而她的外祖父辈则有一位是科学院的荣誉院士，曾撰写过天文学、大地测量学及地理学的书籍。

索菲娅的母亲，伊丽莎白·费奥多罗芙娜[Elizaveta Fyodorovna,

娘家姓舒伯特(Schubert)]是一位善于交际的女性,也是一位成功的钢琴家。然而,就像当时的其他俄国女性一样,她只接受了少许的正规教育。在日记里她苦涩地抱怨了年长她 20 岁、对她漠不关心又冷淡的丈夫。她为他育有一儿两女。大女儿安娜(Anna),家里人爱称她阿纽塔(Aniuta),二女儿索菲娅则被家人称为索尼娅(Sonya),这便是她日后常用的名字。她们的教育被交与一位波兰家庭教师和一位严谨的英国女家庭教师。

索尼娅,自此我们便如此称呼她,她的父亲是一位接受过良好教育的人士,精通英语和法语。1858 年,当他从俄国炮兵部队将军的职位上退休后,他们举家搬至位于圣彼得堡和基辅之间的帕利比诺。他享有荣誉元帅的称号,在当地颇有地位。在搬去那里,也即索尼娅 8 岁之前,他们住在莫斯科南部的卡卢加。索尼娅认为这次搬家十分有趣,她在自传里写道:“当我们从卡卢加搬去那个地方时,整个房子已经漆好并铺上了墙纸。墙纸是从圣彼得堡定制的,但是所需的数量却没有预计准确,因此少了一个房间的量。考虑到让其他所有房间都保持一致,也许育儿房没有这种特殊的墙纸也无关大碍。”于是一些陈置在阁楼里的纸被拿来充数。有趣的是这些用来糊墙的纸是由她父亲还年轻时从分析学家奥斯特拉格拉德斯基(M. V. Ostragradsky)那里得来的微积分讲座的印刷本。她继续写道:“我看到这些纸时非常开心,这些纸因时间长久已经泛黄,斑驳地记载着一些难以辨认的文字,我完全不知其所云,但是我觉得这些东西必定是非常充满智慧和趣味的。我会杵在墙边一站几个小时,一遍又一遍地读着上面的内容。我特别记得在墙纸上正好最突出的地方,书写着无穷小与极限概念的解释。”

快乐重情的阿纽塔,为她妹妹所崇拜着,她开始撰写短篇小说,并寄了其中的两篇给陀思妥耶夫斯基(Feodor Dostoevsky),他深受感动并安排它们进行出版。在阿纽塔与父亲几番争论之后,这位小说家被邀请去拜访他们,而有相当的证据说明他曾向 20 岁的阿纽塔求婚却遭到了拒绝。之后索尼娅写了一篇成功的小说《童年回忆》(*Memories of*

Childhood),此书似乎是基于她的早年生活;她还写过随笔、独幕剧和其他文学体裁。

除去至亲之外她还有两位叔叔,一位醉心于生物学,而另一位则对数学充满兴趣。也许是基于这个原因,索尼娅开始同时学习这两门课程,且对数学更有兴趣。物理学家特尔托夫(Nikolai Nikanorovich Tyrtov)是她的家族的一位好友,在看过他的某本关于三角学的书后,她给出了一些非常聪明的见解,此举说服特尔托夫大力谏言她的父亲让她学习高等数学。尽管她的父亲反对女性学习,但他为17岁的索尼娅在圣彼得堡安排了私人微积分课程,老师为她理解概念的速度所震惊,而这应归功于育儿房的墙纸。

鉴于对女性来说,在俄国没有任何接受高等教育或从事职业生涯的可能性,阿纽塔和索尼娅决定如果要更进一步深造的话就不得不离开自己的国家。问题是要获得所需的旅行证件,女性需要丈夫或至少一位监护人。最常见的解决方法是签署一个名义上的婚姻协议,即一个没有任何实质的合法婚姻。他们找到了一位叫柯瓦列夫斯基(Vladimir Onufrievich Kovalevsky)的思想激进的年轻出版家,准备由他担当此任。这位年轻人是邻居家的小绅士,经常周游西欧国家。在他的游途中,他结识了被流放的激进的赫尔岑(Alexander Herzen),这足以让他被沙皇手下的机构定时监控。在回俄国之后,他开始从事科学读物的出版事业,但是当他把赫尔岑颇具争议的《谁是罪魁祸首?》(*Who is to blame*?)加入他的出版目录时,监管人员出面干预并把所有的印刷品都摧毁了。

不顾父亲的强烈反对,索尼娅与柯瓦列夫斯基在1868年9月举行了形式婚礼,当年她18岁,自此她的姓成为了柯瓦列夫斯卡娅。接下来的日子里,两姐妹和柯瓦列夫斯基离开俄国到了维也纳,在此他们分别,阿纽塔前往巴黎与一些政治积极分子联系,而柯瓦列夫斯卡娅和柯瓦列夫斯基则前往海德堡。

柯瓦列夫斯卡娅轻而易举地获得了在大学进修的许可。因此她与

本生(Bunsen)、亥姆霍兹和基尔霍夫(Kirchhoff)一起学习自然科学,与魏尔斯特拉斯的前弟子杜布瓦雷蒙(Du Bois - Reymond)和柯尼希斯贝格尔(Königsberger)一起学习数学。课程安排很紧密,但尽管如此,这对新婚夫妇也抽空去了英格兰旅行,在那里柯瓦列夫斯基去见了生物学家达尔文(Charles Darwin)和赫胥黎,而索尼娅去拜访了女作家艾略特(George Eliot),并发现两人有许多共同点,她还与哲学家斯宾塞(Herbert Spencer)讨论了女性在抽象思维方面的能力。

不久后这对名义夫妻面临了各种困难并开始分居,倒也算符合了最初的设想。1870 年秋天,柯瓦列夫斯卡娅去柏林大学与魏尔斯特拉斯本人建立了联系。当他用一些问题测试她时,他对她的回答非常满意,以至于他开始给她上私人课程,内容涵盖他在大学教授的同层次课程,而这些是柏林大学规定不允许对女子传授的。如她之后所说:“这些学习对我的数学职业生涯可能有着至关重要的影响。它们使我最终坚定不移、义无反顾地选择了我之后科研工作的方向,我所有的成就恰恰是受到魏尔斯特拉斯的启发。”

当魏尔斯特拉斯和柯瓦列夫斯卡娅相遇时,她 20 岁而他 55 岁。他与她无论在学科还是在个人方面的交集都已超出寻常师生关系。在她身上他发现“他的思考有了全新的热情,在与她的对话中他的思路总能格外清明”。在 1873 年休假期间,他写信给她:“我最亲爱的朋友,在这样宏伟的自然景象里我时常想起你,并且总是想如果你也在这里的话会是何种境况。我们一起在这里会有多美好——你有你充满想象力的思维,我则被你的热情所感染与激发——于许多未解之谜中梦想与翱翔,留待我们解决的有有限与无限空间、太阳系的稳定性,以及其他许多数学与物理学相关的伟大问题。然而,我在很久之前就已明了,不是每个美丽的梦想都能实现。”似乎对他来说“这些在(我的)一生中都很亲近,而我从未发现任何人能像你一样给我带来对科学最高目标的理解,以及符合我的本意和基本原则的快乐。”当然他们的关系也并不是全无矛盾的。她与社会主义团体的联系,她的文学作品,以及

她对女权主义的推动都招来他的不满。他的许多信件都没有得到她的回复;有一次她有三年没有给他任何回应。

同时,柯瓦列夫斯卡娅的姐姐阿纽塔与巴黎的激进分子联系颇多,其中包括一位名叫维克托(Victor)的人,他们住在一起。他们与当局发生了严重矛盾,以至于维克托面临即刻处决。历经艰险,柯瓦列夫斯卡娅和柯瓦列夫斯基成功进入了巴黎,企图在重重包围中解救阿纽塔和维克托。几个月间他们经历了巴黎公社的生活。柯瓦列夫斯卡娅的父母也因为阿纽塔而前往巴黎。她的父亲利用自己在军队的影响力让维克托逃往瑞士,而阿纽塔则先逃往英格兰,然后与维克托在瑞士会合,并在那里结婚。

在这些戏剧性的事件之后,柯瓦列夫斯卡娅返回柏林大学,并重新开始向魏尔斯特拉斯学习数学。在他的指引下,她开始进行微分方程理论的学习。他给予她所有的鼓励,而且根据他给她的信笺,其中也有感情方面的内容。当他成为柏林大学的校长之后,她担心他会不再有时间顾及到她,但是事实却远不是这样。他鼓励她向博士学位进军,虽然这在柏林大学没有可能性,但是格丁根大学却没有排除女性的规定,所以在1874年秋天,她被缺席授予最高荣誉学位。除了她在微分方程方面的成就外,她还提交了关于阿贝尔积分的论文和另一篇关于土星光环形状的论文,由此证明她并没有单单依附于魏尔斯特拉斯给予的观点。

她的主要成果发布于"克雷尔杂志"。她在某种程度上被柯西寄予厚望,尽管魏尔斯特拉斯对此并不知晓。有些结果的发表与达布有些重叠,但幸运的是对优先权的争论得以避免。其主要结论,也是微分方程理论的重要一环,通常被称为柯西-柯瓦列夫斯卡娅定理。

柯瓦列夫斯卡娅当时已近25岁。她与她的丈夫在1873年重修于好,并为未来的共同生活作出了计划。他也获得了博士学位。他们最终从七年的柏拉图式关系走进了真正的婚姻。他们在1874年秋回到了俄国,被圣彼得堡的知识分子们款待,到场的科学家却没有艺术家、

学者、作家和思想家多。他们从未与激进派真正疏远,并且用大量的时间参与了各种变革活动,但通常都不了了之。柯瓦列夫斯卡娅继续写着小说,源于其自身的经历,书名为《一个虚无主义的姑娘》(*A Nihilist Girl*)。

然而对柯瓦列夫斯卡娅和柯瓦列夫斯基来说,在祖国的生活迅速幻灭了。在俄国想要教授高于小学程度的课程,即使拥有德国的博士学位,仍然需要通过官方的考试,而这不允许女性参加。她的丈夫第一次考试失败了,但在1875年最终通过。即便如此,他也没有保住他本人认为十拿九稳的职位。他开始从事游走于法律边缘的投机事业,希望能借此积累财富。

而如我们所知,魏尔斯特拉斯的弟子米塔-列夫勒拜访了柯瓦列夫斯卡娅,他之后回忆道:"在圣彼得堡我所遇见的最有趣的事情就是结识了柯瓦列夫斯卡娅……作为一名女性,她简直无与伦比。她美丽动人,当她说话时她的整张脸会生动起来,充满女性善意的表情和最高的智慧,使她明艳动人。她的仪态简单而自然,没有任何做作和自负。她从各方面来说都是一位'独一无二的女性'。作为一名学者,她以其非同一般的清晰和准确的表达能力而著称……我完全理解为何魏尔斯特拉斯认为她是他最具天赋的学生之一。"

1878年,柯瓦列夫斯卡娅生了一个女儿,名为弗拉迪米罗芙娜(Sophia Vladimirovna),昵称芙法(Fufa)。她的丈夫因为自己开创事业方面的无能,并且由于他的商业伙伴是个诈骗犯,从而使自己债务缠身,他失去了对工作和人际关系的全部兴趣,并开始与世无争。另一方面,柯瓦列夫斯卡娅重拾了数学活动,深觉自己曾经在接受教育时所花费的努力不能被白白浪费。就像我们之前看到的,米塔-列夫勒为她的能力所深深折服,因此他试着为她在自己任教的赫尔辛基大学找到一个职位,但是并没有成功。

柯瓦列夫斯卡娅将丈夫留在俄国,带着女儿芙法在1881年重回柏林大学。在那里魏尔斯特拉斯建议她参与一个新的数学项目,而米

塔-列夫勒则继续努力为她寻找职位。第二年她搬去了巴黎,把芙法留给在敖德萨的亲戚照顾。同时她的丈夫绝望地试图偿还自己的债务,最终在1883年4月27日,他结束了自己的生命。当柯瓦列夫斯卡娅从最初的震惊中恢复后,她回到了俄国,为逝去的丈夫正名,打理他的身后事,并为他们的女儿暂作安排。

彼时一些国家的大学开始准备接受女性成为教员,瑞典是第一个这样做的国家。如我们所知,米塔-列夫勒转去了新建的斯德哥尔摩大学,并且安排她来与他共事。所以柯瓦列夫斯卡娅去了斯德哥尔摩大学,并开始作为编外讲师在这所高等学府工作。尽管她初涉讲堂,而且她的德语也不甚流利,但是她迅速地拾起了自信心。在这门课接近尾声之时,她被学生所拥护,并且被赠与了一幅加框照片,说不定本书中的肖像照就是这幅照片。她的试用期异常成功,所以米塔-列夫勒成功说服学校给了她五年的教授职位聘期。

柯瓦列夫斯卡娅也成为了《数学学报》的早期编辑之一。斯德哥尔摩大学的数学系当时已是一潭死水,但是通过她在《数学学报》的工作,加之时不时去柏林和巴黎造访,她得以与当时许多顶尖的数学家保持联系。作为开始,她在瑞典的首都过得很快乐。她的工作步入了正规。社交上她引起了轰动,成为不停组织晚宴的明星。尽管她把女儿留在俄国的事实使她遭受了一些负面评论,但作为一名寡妇,在瑞典这个保守的社会她仍被接受了,但如果她的丈夫仍然在世,而他们分居两地的话,情况就大大不同了。米塔-列夫勒的妹妹安娜·夏洛特和她成为了好友。她们一起写了一出剧本,叫做《为快乐而挣扎》(*The Struggle for Happiness*),这出剧在莫斯科的演出大获成功。作为圣彼得堡科学院的通讯院士,柯瓦列夫斯卡娅希望能成为正式院士,但反对者太多。

柯瓦列夫斯卡娅的姐姐阿纽塔已经病了一些时日,1886年夏天她的病情恶化。她和丈夫被驱逐出俄国而返回巴黎,在那里她因手术失败而去世。当时柯瓦列夫斯卡娅在斯德哥尔摩大学的五年聘期已接近

尾声。幸运的是,由巴黎科学院设立的闻名遐迩的博尔丁奖,1888 年的竞赛题目是关于刚体运动的,而她的参赛作品,发展了之后众所周知的柯瓦列夫斯卡娅顶理论,为她带来了国际性的荣誉。结果斯德哥尔摩大学次年任命她为终身正教授,使她之后的未来有了保障。

然而之前几年发生的那些事件,特别是她姐姐阿纽塔的死亡,都对她造成了影响。因为把女儿芙法置于不顾而追随米塔-列夫勒,柯瓦列夫斯卡娅在 1890 年上半年留在巴黎试图做出弥补。她在秋季学期回到了斯德哥尔摩大学,随后到热那亚度假。回程中她开始生病,可能是流感。柯瓦列夫斯卡娅因肺部感染于 1891 年 2 月 10 日去世,享年 41 岁。她在鼎盛时期过早逝世,带给魏尔斯特拉斯巨大的悲痛。他烧光了她写给他的所有信件,只有一封草稿得以幸存。信中写了她初到斯德哥尔摩,这个她度过余生的城市时的所有感想。她的成功为女性的学术生涯开启了扇扇大门。所有与她有过交集的人都追忆她为一位拥有伟大的精神与创造力的女性。

庞加莱(1854—1912)

19 世纪数学的发展起源于一位巨人的启蒙,终结于另一位巨人的灵感。朱尔·亨利·庞加莱(Jules Henri Poincaré)使许多数学分支得以转变,他同样为数学物理学,特别是天体力学作出了巨大的贡献。就像一个世纪前的高斯一样,他独自钻研,拥有一小群学生,没有成立任何学派,但是与高斯不同的是,他自由地发表文章,并且在许多场合撰写并谈论数学、科学和哲学。

庞加莱的双亲来自于中产阶级家庭,世代居住于法国洛林地区,主要是在南锡。他的祖先中有一位著名的学者。他的一位表亲,雷蒙·庞加莱(Raymond Poincaré),之后出任法国首相,并在第一次世界大战时期担任法兰西共和国总统。亨利·庞加莱于 1854 年 5 月 29 日在南锡出生。他的父亲莱昂·庞加莱(Léon Poincaré)是南锡大学的一位



物理学家和医学教授。亨利和他的妹妹阿兰(Aline)先是由他们的母亲进行教育,后来亨利显露出了他传承自外祖母的数学能力。他在5岁时感染了白喉,致使他有近一年的时间无法开口说话。这使他的健康受损,并让他远离了吵吵闹闹的童年嬉戏,却没让他少受人欺负,而到了8岁的年纪,他第一次步入学堂。就像他之前的欧拉和高斯,他天生拥有超凡的记忆力,但是他的行动协调能力却很贫乏,而且还患有深度近视。

庞加莱在一个舒适的学术氛围中长大。因为有着充裕的时间去阅读和学习,他进步神速。在学校,他非凡的能力首先显露于法语写作,但在他求学生涯的尾声,他的数学天赋已经彰显无遗。就如他的同班同学阿佩尔回忆道:"以内在的认知来吸收知识……当他说话时,他的眼睛传达出一种善意,融合着蓄意和睿智。他简短、急促的话语中夹带着冗长的沉默,这种说话方式让我震惊。"他的求学之路因普法战争而中断,他的家乡城市阿尔萨斯-洛林成为了德国侵略的火力集中点。庞加莱跟随父亲乘着救护车到处走,最终成为了一名热血的法国爱国主义者。战争期间,为了读懂简报他学习了德语。之后的人生中,他都与德国数学家维持着友好的交往。

在学校,庞加莱获得了小学数学优等生竞赛的头奖,并且在1873年法国巴黎综合理工学院的入学考试中成绩优异而拔得头筹。他还参加了巴黎高等师范学院的入学考试,并在候选人中获得第五名,但由于他打算成为一名工程师,所以不像他同时代的博雷尔和阿达马,他理所当然地选择了巴黎综合理工学院。

在巴黎综合理工学院,庞加莱进步神速,尽管因画图和实验方面的笨手笨脚使他丢掉了期末考试第一名的位置。接下来的4年他去了矿

业学院。在获得采矿工程师资格的同时，他撰写了关于微分方程性质的博士论文，而论文后来在《巴黎综合理工学院校刊》上发表。在作为采矿工程师工作了一小段时间之后，他决定投身于数学事业，并获得了诺曼底卡昂大学的一个职位。在卡昂大学，庞加莱获得了第一个重大发现：自守函数理论中非欧几里得几何的显现，而自此他开始与克莱因展开竞争。庞加莱能获得这个发现是由于他强烈的兴趣。在富克斯（Lazarus Fuchs）的文章中遇到了具有这种性质的函数之后，他一直在思考关于线性分式变换的周期性。这类函数是从微分方程产生的，而庞加莱被一个意外的几何方面的灵感所激发，一直试图想以分析方法来理解它们。他写道：

15天来我试图证明没有任何与我称为富克斯函数的相似函数能够存在，我当时非常无知。每天我花一两个小时坐在自己的办公桌前，我试了大量的组合方式，但是没有一种可以得到结果。某个晚上，一改往日的习惯，我喝了黑咖啡，无法入睡，各种想法汇聚在云雾之中，互相碰撞，直到有一组搭配在一起形成了一个稳定的组合。到了早上我已经构建了一类富克斯函数，由超几何级数衍生而来。我只来得及写下结论，而这就用了我几个小时的时间。

庞加莱的这段经历，也即是他意识到自己用潜意识在工作的状态，心理学家称之为超我意识。这似乎是一种相当罕见的现象，但是潜意识在创造性的场合中所起到作用的例子不胜枚举。事实上，这种“带着问题入睡”的想法，即想着问题入睡通常在醒来后会得到答案，似乎也被大众所接受。庞加莱对这类事物非常感兴趣，并且以自身经历不断给出引人入胜的实例：

之后我离开了当时居住的卡昂，参加了一个由矿业学院组织的地质学旅行。紧凑的旅程使我忘记了数学工作，到了库唐斯我们乘坐汽

车继续前行。当我踏上汽车的瞬间我突然想到，显然我之前的思考并没有使我为随后的想法做好准备，我曾用来定义富克斯函数的一种变换与非欧几里得几何的变换一致。我没有进行证实，当时我并没有时间，因为刚在车上坐定我就继续了刚才被打断的谈话，但是我有一种感觉和十足的确定。在回卡昂的途中，我用空闲的时间做了证实，得以使自己安心。

这个发现使他扬名立万。像是种惯例，他的大部分发现似乎都是在他旅行时得到的。他继续写道：

我接下来进行了一系列算术研究，但都没有显著成果，而且毋庸置疑这些内容都与我之前的研究相关甚微。因一无所成而感到厌烦，我来到海边散心并发散思维。某一天，当我在悬崖边散步时，灵光闪现，和之前的征兆一样，简明，突然，即刻确定，即不定三元型的变换与非欧几里得几何的变换一致。

在回卡昂的途中，我回忆了这个结论，并演绎了推导过程，二次型的例子表明，存在着与那些对应于超几何级数的函数不同的富克斯群；我认识到可以把富克斯 θ 函数运用于此处，因此这里存在着不同于其他由超几何级数推导出的富克斯 θ 函数，这是此时我唯一知道的结论。我自然地让自己尝试建立所有这些函数。我实施了有计划的攻坚，一个接一个地完成了所有工作。然而，仍有一个函数不符合要求，它的突然出现会动摇整个命题。不过我所有的努力只是让我更好地认识了困难，这本身也是有价值的。

研究至此，我前往瓦勒里昂山，履行兵役义务。于是我有了完全不同的任务。某天，当我步行于林荫大道上时，这个困境的解决方法突然出现在我的脑海中，使我停下了脚步。我并没有立刻投入到钻研中去，而是在我结束兵役时才重新考虑这个问题。我拥有了所有的元素，只需要组合和调整它们。所以我一气呵成，毫无困难地写下了最后的研究

报告。

基础几何学(之后是基础拓扑学)的发现使富克斯函数站在了全新的聚光灯之下。之后的数年中,庞加莱狂热地致力于发展这些理论,与克莱因形成友好的竞争。对于他的行文风格有些保留的说法——尽管具有可读性,可是条理不清且缺少严谨——但他的天赋却从未受到质疑。

庞加莱在1881年回到巴黎,时年27岁,并在同年与门当户对的珍妮·路易丝·玛丽·普兰·得·安德西(Jeanne Louise Marie Poulain d'Andecy)结婚,他们育有四个孩子,一子三女。应该是在那时,西尔维斯特在他位于盖-吕萨克街的"空中楼阁"拜访了他,在吃力地爬过三层窄梯并到达他的书房时,西尔维斯特吃惊于自己见到的是一个大男孩,"满头金发,年纪轻轻",他是海量论文的作者,并被预示为柯西的继承者。

西尔维斯特得以颇为深入地了解庞加莱。某次机缘巧合,若尔当聚集了一些人,其中包括庞加莱,参加了他为西尔维斯特组织的晚宴。当庞加莱到达时,西尔维斯特投去了他所有的注意力,甚至没有时间去与女主人打招呼。"我有一个美丽的定理要给你看看,"西尔维斯特说道,随后他做了演示。从那一刻起庞加莱未置一词,他像机器人一样吃掉了整顿饭。饭后庞加莱恢复了意识,他来到西尔维斯特身边,大声说"但你的定理是错的!"并当场证明给他看。

最初庞加莱只是巴黎大学上数学分析课的一位讲师,但是到1886年他已经是数学物理学和概率演算的教授了,他的职位为他赢得越来越高的荣誉,并一直保留到他生命的终点。1887年,当他32岁时,他因自守函数的成就被选入巴黎科学院,6年以后进入法国经度局。次年,他被选入伦敦皇家学会,成为一系列荣耀中的第一项,随后他又成为了该学会西尔维斯特奖章的首位获奖者。

庞加莱的外甥写给米塔-列夫勒的一封信中有一副庞加莱不知疲

倦工作的照片:"在他位于巴黎的书房或者洛泽尔花园的树荫里,庞加莱会花几个小时坐在一叠画有横线的稿纸前,可以看到纸张以让人吃惊的平稳速度,被他工整而有些生硬的字迹所覆盖。几乎鲜有改动,也很少会有犹豫不决之时。几天之后一份长篇的研究报告就会完成,准备被印刷,而我的舅父自此则只会把这归作已经过去的兴趣。他很难被说动去看一眼编辑们寄给他的校样……"信里继续写道:"经常可以看到庞加莱把想法埋在心里。不像一些其他科学家,他不相信口头交流,不认为以会话交换想法会对探索发现有什么帮助……我舅父认为数学发现是完全排除合作的可能性的。所谓的直觉,也即是探索发现的由来,是一种直接的神交,伴随着精神与真理,不可能有中间媒介。"

比之其他课题,组合拓扑学占据了庞加莱后半段的研究生涯。基本上,是他建立了这个科目,把之前已知的混乱结论重新排列,为之后许多年的学科发展列出了发展大纲。他的拓扑观点不仅为复分析和力学带来了新的生机,而且它们结合在一起形成了一个崭新的重要领域。在1892—1904年的13年间,他构建了一个以拓扑学技术和概念发展起来的宝库。"我所做的一切都将我引领向了拓扑学,"他在1901年写道,"我需要那方面的科学来验证我以更高阶微分方程所定义的曲线的研究;我需要它来支持二元非单值函数的研究;我需要它来支持多重积分周期的研究,并将其运用于摄动函数的展开。于是我由一个群论中的重要问题进入了拓扑学领域,也即研究在已知连续群中包含的离散群和有限群。"

庞加莱的另一个伟大发现是微分方程定性理论。他将这个理论用于解决诸如动力系统中长期稳定性的问题,套用在他的文章《天体力学新方法》(Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste)中,这可能是继牛顿定律之后天体力学最伟大的一次进步。如我们所知,庞加莱在三体问题上的研究报告是赢得那个由瑞典与挪威国王资助的国际大奖的敲门砖。这为庞加莱的同名三卷本著作提供了基础,此书为动力系统中的混沌性态第一次提供了数学描述。他之后写了另一部三卷本

著作,题为《天体力学讲义》(*Leçons de mécanique céleste*),论述的内容相差不多,但是减少了很多技术细节上的要求。

庞加莱对魏尔斯特拉斯学派所关注的病态函数不以为然:"逻辑有时会成就怪兽。近半个世纪我们看到大量奇怪的函数被强加建立,而其中极少数可靠的函数是有意义的……从逻辑的角度来看,这些奇怪的函数极其正常;从另一方面来说,那些没经过寻觅就遇到的函数,那些遵循简单定律的函数,仅仅只是为了满足一些不足一隅的特定情况而出现……曾经,人们为了实用的目的发明一个新的函数;而今天有些人发明函数的目的只是为了从我们父辈的推理中寻找破绽,而且他们只会从以前的推理出发进行推断。"

随着庞加莱年龄的增长,他在关于数学性质的基本问题上所花费的时间也越来越多。他写了一些论文用以抨击希尔伯特、佩亚诺(Peano)和罗素(Russell)的逻辑和理性哲学。他的成果在某种程度上预示了布劳威尔的直觉主义论点。柯朗某次在耶鲁大学演讲时回忆道,庞加莱在即将去世前到格丁根大学做了几次不同题目的演讲:一个是关于电磁波在地球上的传播,另一个则是数学基础。那是一场对康托尔主义,以及对使用选择公理和良序原理的猛烈攻击。庞加莱试着以礼相待(如果他愿意,他可以极具破坏力和攻击性),他激烈地反对康托尔的论点,并且反对以此为方向的研究趋势。有一名观众极刻薄地描述他,一个略驼着背的矮小男人,蓄着乱七八糟的短胡子,眼神悲伤。

庞加莱在集合论上的观点日后似乎有了转变。他在1880年第一次用集合论这个术语来描述出自康托尔的被我们称为点集论的早期结论和概念。他对此充满热情,并且在1885年趁着机会,向新近成立的法国数学学会的秘书长,为康托尔申请会员身份。就点集论的意义而言,没有理由认为庞加莱在后半生曾后悔早期对集合论的热情:庞加莱在格丁根大学是由于公理化集合论而被攻击的。

庞加莱是最后一批全能型数学家之一,一位对于所有数学支系都

有所掌握的数学家。和欧拉一样,他源源不断地就数学的各个部分发表文章,事实上在通俗文章的发表数上他已超越了欧拉。1908 年他因为说明工作的优秀质量而入选法兰西研究院的文学部门——法兰西语言文学学院。同样享有此盛誉的只有达朗贝尔、拉普拉斯、傅里叶和之后的皮卡。他写了数本关于科学及其哲学含义的书,在 20 世纪初期销量斐然。然而由于他所有的天赋与前期训练,庞加莱显然对于数学文献颇不以为然。这导致的一个结果就是,他听到的每一个新课题都会将他的兴趣引领向一个新的方向。所以当他听到黎曼和魏尔斯特拉斯在研究阿贝尔函数时,他也完全投身于阿贝尔函数。他总结黎曼的理论为"总而言之就是种发现方法",而魏尔斯特拉斯和戴德金的则被总结为"总而言之就是种演绎方法"。

直觉一直在庞加莱的研究中起到重要作用,而有时会将他引入歧途。例如在他早期关于拓扑学的论文中,并没有对挠率现象给予足够的关注。而且当他用一种定义来证明一个定理,而用另一种差异明显的定义来证明另一个定理,但却没有证明这些定义是等价的时,他似乎并不以为意。必须承认庞加莱的几何直觉不时能使他忽略那些证明中迂腐的严密性。当然这里还有另外一方面:庞加莱发现脑中总是汇聚着各个数学领域的各种各样的想法,他没有时间来严格区分,据说,他的直觉总能给予他信心来完成这些定理的严密逻辑证明,然后将完成的证明展现给他人,对此他深感满意。

纯粹数学方面,庞加莱对很大范围的课题都作出了基础性的贡献,在微分方程、函数的一般理论和拓扑学方面尤为突出。其中大部分研究成果或多或少都是由应用的可能性所驱动的。他所写成的 500 多篇论文中,大约有 70 篇是用以解决与物理密切相关的问题,包括光学、电学、毛细管应用、热力学、热能、弹性和电报学。他对于理论物理尤为着迷。早在 1899 年,他就已提出绝对运动是不存在的;次年,他还提出了没有什么能快过光速。这两个概念后来无疑成为爱因斯坦的狭义相对论的核心,并直至 1905 年才被发表,但是没有证据表明当时庞加莱已

意识到它们全部的内在含义。

庞加莱经常受邀参加科学学术会议。例如在1900年的某两周内，他不仅主持了第二届国际数学家大会，作了主席演讲：关于直觉与逻辑的作用，而且参加了国际哲学大会，主讲力学原理，他还参加了国际物理学大会，阐述实验物理和数学物理之间的关系。1903年，他穿越大西洋，参加在圣路易斯举办的国际艺术与科学大会，主讲数学物理的现状与未来，并借此机会访问了美国的其他地方。

在1908年于罗马召开的第四届国际数学家大会上，参会者就因庞加莱由于医疗需要，得在按日程作关于数学的未来的演讲之前返回巴黎而感到担心。1911年，他踏出了出人意料的一步，发表了一篇未完成的关于三体问题周期解的论文，他生怕在有生之年来不及完成。我们之后会看到，庞加莱的最后几何定理的证明随后是由年轻的美国数学家伯克霍夫(George Birkhoff)完成的。庞加莱在1912年7月17日突然离世，享年58岁，死因是术后栓塞。数学界为这位当时最伟大的数学家，也是有史以来最伟大的数学家之一的过早离世极为震动。

希尔伯特(1862—1943)

现在我们回到德国。大卫·希尔伯特(David Hilbert)，一位激励人心的教师，一位伟大的研究者，是庞加莱过世后公认的数学界领军人物。许多数学家来到格丁根大学，作为学生、作为教员或作为访问者，均拜倒在他的魅力之下。从他们中一些人的回忆录里，我们可以对希尔伯特与众不同的魅力略窥一二。他对数学的数个分支进行了革命性的改造，他开拓了新的研究领域，而他振奋人心的著作对数学界也产生了有力的影响。希尔伯特最重要的职业生涯在20世纪的前四分之一阶段。

希尔伯特1862年1月23日生于东普鲁士的重要城市柯尼斯堡附近的韦劳。他来自于一个自17世纪起定居于萨克森弗赖贝格附近的新教中产家庭。他父亲方面的近祖是在首都和普鲁士王加冕的城市



(即柯尼斯堡)工作的知识分子,并发展了一种特殊的文化传统。他的父亲奥托·希尔伯特(Otto Hilbert)是一位法官,他的母亲玛丽亚·特蕾莎[Maria Theresa,娘家姓厄德曼(Erdtmann)]对数学很感兴趣,而希尔伯特则被认为从母亲家族那里继承了天赋。这位未来的数学家是家中唯一的儿子,而他有一个妹妹在28岁时死于分娩。

当奥托·希尔伯特成为更高级的法官后,他们举家移居柯尼斯堡,而他们的儿子10岁时*进入了皇家腓特烈中学。这是一所传统的语法学校,其课程着重于古罗马文学,除了一些数学之外没有科学课程。在柯尼斯堡,对希尔伯特这样的人来说这不算是最适合的学校,而那些之后与他成为至交的人则进入了更先进的威廉斯文理中学**。他初露锋芒,用一年的时间完成了文理中学学习,随后的三年,除去按照惯例在海德堡大学学习的两个学期之外,他在柯尼斯堡大学度过了学生生涯。

另一位当时在柯尼斯堡大学的学生是早有所成的闵可夫斯基,他早在史密斯的故事里就被提及过。闵可夫斯基比希尔伯特年少两岁,但是当时在学术上比希尔伯特更有作为的他担当了希尔伯特的导师角色。他们成就了一段长久的友谊。对希尔伯特来说,另一个早期的有影响人物是柯尼斯堡大学的赫尔维茨,虽然只比希尔伯特年长三岁,但他当时已是大学的副教授。在希尔伯特的学生时代,领军的数学家是能力卓越的全能型人才海因里希·韦伯,他与戴德金共著了研究报告《单变量代数函数》(Algebraic functions of a single variable)。1883年,韦伯离开,林德曼继任。林德曼因证明了π的超越性而闻名于世。林

---

* 原著误为8岁。——译者

** 希尔伯特在1879年也转入了威廉斯文理中学。——译者

德曼几乎称不上是一位一流数学家，但是他的兴趣广泛，其中之一就是不变量理论。这便是希尔伯特毕业论文的课题。

希尔伯特在1884年底通过了博士学位考试，并准备按惯例到其他（学术）中心进行游历。他首先去了莱比锡大学拜访克莱因，并从此与他结成了长久的友谊，然后他去了巴黎，得以与埃尔米特、若尔当和庞加莱见面。在回柯尼斯堡大学的途中他在柏林大学停留，并遇见了克罗内克，当时克罗内克刚在学校继承了库默尔的职位。到了1886年，希尔伯特在柯尼斯堡大学成为一名编外讲师，并在之后的六年都担任此职。1892年，他因为赫尔维茨转往苏黎世大学而得以继任，被提升为副教授。同年他与一位当地商人的女儿，独立自主的克特·耶罗施（Käthe Jerosch）结婚，他们的独子弗朗茨（Franz）在次年出生。弗朗茨患有精神疾病，从21岁起成为了精神病院的常客，再未过上正常的生活。

希尔伯特在那段时期的主要研究兴趣是不变量理论，1893年他向芝加哥数学大会递交的阐述其研究成果的论文引起了轰动。首先是英国的凯莱和西尔维斯特，接着是德国的克莱布什和哥尔丹（Gordan），都曾千辛万苦地构造不变量列表。他们的研究使他们猜测不变量集总是有一个有限基，但他们所用的算法却只能让他们在很有限的范围内作出证明。通过巧妙运用抽象代数，并使用了过去戴德金的理念，希尔伯特用短短几页纸就证明了这个猜想。当哥尔丹听说此事后大呼震惊："那不是数学，那是神学。"

很久之后柯朗这样描述希尔伯特解决问题的方式："他是最务实、最富有直觉的数学家，并且非常有意识地遵循着一种原则：名义上讲，如果你想要解决一个问题，首先要剥除一切无关紧要的东西。简化它，并在不失其核心的基础上让它尽可能专门化。随后它就变得简单了，除了保留其重点外只剩下本质，然后你再去解决问题。概括来说就是，你不需要太在意一些琐碎方面。希尔伯特的这个原则对他来说极其有用，对那些从他这里学到此法的人也是；然而不幸的是，这个方法已经被遗忘。"

1893 年林德曼从柯尼斯堡大学转去了慕尼黑大学，而当时是希尔伯特成为副教授的第一年，他在激烈的竞争中脱颖而出，被选为继任者。尽管刚过 30 岁，他已成为一流大学的正教授。前一年转到波恩大学的闵可夫斯基在发生了一些争论之后，回来接任了希尔伯特空下来的职务，尽管不久后他又随赫尔维茨转去了苏黎世大学。希尔伯特待在柯尼斯堡大学的十年间，他的讲课涵盖了很大范围的课题，从数论、函数论、射影几何学和微分几何学，到伽罗瓦理论、流体力学和微分方程。而且，除了一门关于行列式的一小时课程之外，同一门课他从不教第二遍。他语速缓慢，而且全不做作。每当授课时，他习惯于将每堂课的开始用于总结前一堂课已教的内容，就像在中学里上课一样。

尽管对故乡有深深的依恋，他仍然想转去一个比柯尼斯堡大学有更好数学生源的地方。希尔伯特习惯于在清晨吃早饭时阅读报纸，只是为了了解欧洲数学教授们的健康状况。那段时间大家都非常健康，但到 1895 年他等待的时机到来了。当某几位数学家去世后，引起了德国一些大学教员招聘的小高峰。接近这一过程的尾声，克莱因帮助希尔伯特来到了格丁根大学，希尔伯特与这所大学联系紧密，并在此度过了剩余的职业生涯。同时他继任了克莱因《数学纪事》主编的职务。据柯朗所说："他对此异常认真，当他残酷地删选论文时全然没有同情心。在他和卡拉泰奥多里(Carathéodory)等人担任编辑之时，杂志的质量很高，也许是当时世界上最好的数学期刊，而在那里发表论文确实意义非凡。"这些年是希尔伯特的鼎盛时期，而克莱因尽管仍然权力无限，却早已淡出研究活动。克莱因强调将纯粹数学与应用数学相统一的重要性，而这与希尔伯特的观点相悖，他认为一个稳妥的公理基础是最主要的，直观论证却没有太大的价值。

他们在其他方面也有分歧。不像希尔伯特，克莱因希望教授与学生之间的关系能保持传统的距离。据柯朗所说：

在格丁根的社会里，如果你翻阅旧的纪事，会发现格丁根大学的教

授就是半神，而且教授，特别是教授夫人都极具等级意识。希尔伯特来到格丁根大学时，对此感到异常沮丧。一些老教授的夫人们聚在一起说："你们听说了那位新来的数学家吗？他对这里的整体情况感到沮丧。我听说某天晚上他被看到在一个餐厅的后间和编外讲师们在一起打台球。"一位正教授自降身份而与年轻人为伍，在这里被认为是离经叛道的。但是希尔伯特完全打破了这个传统，这是建立一种科学生活的巨大进步。青年学生们来到他家，和他一起喝茶吃饭。希尔伯特夫人为助教、学生等准备了盛大、慷慨的晚宴。希尔伯特与他的学生们，以及任何愿意同行的人，来到丛林中进行几小时的徒步，途中他们探讨着数学、政治和经济问题。

柯朗还描述了希尔伯特工作时的场景：

他用了所有的时间来做园艺，而在做园艺和杂活的间歇，他会走到一块大概有6米宽的黑板前，那里有遮盖，所以他在雨中也能走来走去，他便在种花的过程中处理数学问题。人们可以看到他一整天。我恰好在五楼有一间学生休息室，透过窗户我可以看到希尔伯特和他的花园。他有一辆自行车，而且会在上面练习一些小特技。这是一种非常无害且惬意的生活，与同事和学生相处，每个和他接触的人都深受鼓舞。

在不变量理论之后，希尔伯特转向了代数数论。他用之后的四年来准备著名的《代数数域理论报告》(*Bericht über die Theorie der algebraischen Zahlkörper*)。如在史密斯的档案中所解释的，这其中一部分本来是要和闵可夫斯基合作的，但是后者的部分并没有成形。在大量的理论家对《代数数域理论报告》极其信任的同时，也有其他人认为它使代数数论倒退了几十年。报告的前言写道：

数域理论就像是一座有着异常美丽与和谐的大厦。对我来说，大

厦最富丽堂皇的部分是阿贝尔域理论，库默尔在高阶互反律方面做了研究，而克罗内克向我们展现了在椭圆函数的复乘方面的探索。这两位数学家为深究这个理论所付出的努力，同时也揭示了在这个领域仍然埋藏着丰富的无价宝藏，作为丰厚的奖励吸引着知道其价值的探险者，让他们因为对艺术的热爱来赢取这些奖励。

1893 年芝加哥大会之后，第一届正式的国际数学家大会于 1897 年在苏黎世召开。随后自 1900 年开始，除了被战争所打断，该大会每四年定期在不同的地点召开。希尔伯特没有参加第一届大会，但是在 1900 年于巴黎召开的第二届大会上，他进行了一场演说，在最后关头他描述了 10 个以连续统假设的证明为首的、他认为至关重要的数学问题。这张著名的问题清单，在发表时被衍生为 23 个问题，受到了极大的关注，或许超出了它本身的价值，当然也远远超出了希尔伯特的预期。这似乎只是在仓促间准备出来的一些他当时正在思考的问题。其中一两个问题几乎马上就被解决了。然而直至今日，除去一些无法很好地被语言表述的问题之外，大概只有一个问题进展缓慢，那就是黎曼假设，即 ζ 函数的零点分布问题。

希尔伯特的数学兴趣异常广泛，要描述它们可能需要占用多到不成比例的空间。像柯朗所描述的："最让人印象深刻的是他了不起的多样化，即他广泛的涉猎范围。对希尔伯特的人生而言，至关重要的就是数学各个方面的多样性。"如同他的性格，他会在数学的某些分支上作出决定性的影响，然后转向差异颇大的其他领域。好比紧接在不变量理论之后，他研究了代数数论，然后转向几何学基础。他试着攻克数论中的华林（Waring）问题，然后在 1908 年去拜访布劳威尔的途中找到了答案。另一次他在思考魏尔斯特拉斯提出的狄利克雷原理，然后在变分法中成功改造了这个有用的方法。随后，希尔伯特开始对物理学特别感兴趣，狭义相对论和一些其他轰动一时的理念的出现，预示着一场重大变革正在酝酿当中。然而值得一提的是，他在数学物理方面的

成就无法与他在数学方面的成就相提并论。

希尔伯特最重要的著作之一是于1899年发行的《几何基础》(*Uber die Grundlagen der Geometrie*),不是因为其中不算新颖的内容,而是在于它们所代表的推动力。其结论经常被引用:

这部作品是对几何学原理的批判式思考,我们被这样的准则所引导,以致我们讨论每个问题的方式在于,审视它是否不能由一些既定的方法,在一些受限制的辅助工具帮助下被解决。在我看来,这条准则本身就已包含了一个普遍而天然的对策。诚然,每当我们在数学思考中遇见一个问题或者猜测一个定理时,只要我们还没有确定已得到完整解答,在精确地证明或清楚地认识到不可能的理由导致必然的失败前,我们对知识的渴望便不可能被满足。事实上,现在的几何学课题正试着回答是否公理、假设或辅助工具对初等几何学真理的证明存在必要性,以后这将取决于课题研究者所偏好的证明方法的立场。

希尔伯特此番哲理性的陈述,也许可以与他当年在巴黎数学家大会上给出他问题清单之前所作的演讲相匹敌:

在理论与实际、思考与观察中充当媒介的工具就是数学,是数学为此搭建起了桥梁,并且给出了最为可靠的形态。我们整个当代文化由此而来,建立在机敏的洞察力和对自然的探索之上,这便是数学的基础。伽利略曾经说过:“人们只有在学会大自然对我们所说的语言和符号时才能明白大自然,而这些语言就是数学,符号即是数学图形。”康德曾经宣称:“我认为,在任何特定的自然科学中,只有在数学出现的范围内人们才能遇见真正的科学实质。”诚然,除非我们剥开外壳并完全抓住它的数学核心,不然我们无法精通一个科学原理。没有数学,今天的天文学和物理学完全不可能出现;这些科学,在它们的理论分支里,实质上可以被分解成数学。它们,连同其他许多应用一起,可能是

数学被大众所青睐的原因。

在引用了高斯和克罗内克的话之后,希尔伯特结尾道:"我们不用去相信那些呼吸着哲学的空气,用带着优越感的语气预言着文化的衰退并自我满足地对'未知'心安理得的人们。对我们来说没有未知,在我的观念里自然科学没有这种所谓。代替这愚蠢的'未知',我们的口号恰恰相反:我们必须知道,我们必将知道。"

尽管希尔伯特尊敬克莱因,但他更需要一个和他志趣相投的同事。理想人选便是他的旧友闵可夫斯基,他在苏黎世过了近十年后正在找机会回到德国。在希尔伯特的坚持下,格丁根大学为聘请闵可夫斯基创设了一个职位。和希尔伯特本人一样,闵可夫斯基也有着广泛的兴趣。在苏黎世他创造了美丽的数的几何,在格丁根大学他开创了四维空间、非欧几里得几何、时空连续统的研究。希尔伯特和闵可夫斯基试着去证明当时全新的狭义相对论的数学基础。闵可夫斯基之前的学生爱因斯坦,对此却不甚看好——他形容希尔伯特的想法像孩子一样——但是之后,他接受了闵可夫斯基在广义相对论中时空的概念。希尔伯特与闵柯夫斯基前景可观的合作关系因 1909 年 1 月 12 日闵可夫斯基死于急性阑尾炎而突然中止。次年出版的闵可夫斯基的作品集,是由希尔伯特编辑的,他因为好友的过早逝世而万分悲痛。

希尔伯特的广泛兴趣也有其弊端。据在 1910 年听过他本科讲座的外尔说,希尔伯特倾向于从一个理论说到另一个,从一个学科行进到下一个,而中间没有给出任何过渡,没有解释历史背景,没有给出他所引用的明确来源,没有停下来讲任何独特的理念,没有给出任何具体的主张,只是一直在声明要用一种统一的观点来掌握这些事物。外尔被希尔伯特所深深折服,但是他认为希尔伯特给学生的授课并没有进行得太深入。这可能与柯朗对希尔伯特教学方式的描述恰恰相反:

他的授课就常理来说并不出彩,而且有时他会准备不足,所以通常

到了最后当他准备的材料不够时,他不得不即兴发挥,这会使他踌躇不前。他的朋友和学生与他开玩笑,在他生日时送给他各种讽刺性的礼物,帮助他延伸授课内容。他也会犯错,会在证明时思维卡住,所以你有机会观察到他有时与十分简单的数学问题作斗争,然后找到出路。这比一场完美无瑕的演讲表演更激励人心。

普法战争在希尔伯特年幼时爆发,围攻巴黎事件发生在他求学时期。尽管战后法国和德国的民族主义都十分强烈,这种敌对当然也被带到了数学领域内,但当在格丁根大学介绍庞加莱的时候,希尔伯特仍然表示:"你知道,我很荣幸与之共事,如同我们一样,法国与德国对数学的爱好曾是那么稳固和接近,而且还会持续下去……以数学为引线串联起来的法国与德国多元且强大,不像两个分立的国家,因此从数学的角度来讲,我们也许可以将德国与法国视为一片统一的土地。"几年之后,德国入侵法国,致使两国开战。如我们所见,克莱因署名支持了《对文化界的号召》,但希尔伯特没有。克莱因被巴黎科学院驱逐,而希尔伯特没有。他认为战争很荒谬,并从不掩饰此说。为此一些学生抵制了他的授课,但是没有其他事情发生。

庞加莱,"举世无双的天才",年长希尔伯特 8 岁。1912 年庞加莱去世后,希尔伯特接任了他的位置,并被大众认为是在世的最伟大的数学家。当他在柯尼斯堡大学时期的伙伴赫尔维茨于 1919 年去世后,苏黎世大学有了一个空缺,希尔伯特曾考虑转去那里。然而尽管战后的德国条件艰苦,但他最终决定留在原处。如我们所知,克莱因的健康堪忧,尽管他仍然在职于格丁根大学,但他对战后的重建工作并没有起到实质性的作用。希尔伯特从未与他所谓的"数学部署"有过太多交集。在他之前的一位学生柯朗的领导下,格丁根大学的数学重新开始繁荣(其中过程会在倒数第二章中描述)。

在 20 世纪,除了有围绕着格丁根大学的光辉,也有一定数量的德国境内和其他地区针对该校教员的反对声。部分是出于嫉妒心,但必

须承认的是，在格丁根大学有这么一种趋势，即教员不必过分担心外部发生的事情，但这也是造成粗心大意的归因。学生们甚至对此有个说法："浑浑噩噩"，（不知）清醒或不清醒。希尔伯特更因为他的无意识或者粗心大意而声誉不佳，柯朗亦是如此。后者有一次提到这点：

希尔伯特是个完全开明的人，对所有学生的批评，对不同的观点都敞开胸怀。每个与他有过接触的人都会感觉到，尽管他是这样一位精神巨人和科学界的泰斗，人们还是可以与他平起平坐地交流——如果你有话要说。希尔伯特不是那种知晓天下事的学者。他没有读过所有的论文，也没有一份可以使他检索所有内容的目录。反而，他的强项之一但也是他的短处之一，就是他非常善于倾听并且抓住灵感，但随后经常会忘记灵感的出处。

希尔伯特一生都对基础性问题非常感兴趣，1899 年出版的《几何基础》便是他偏好公理学的一个例子。对他来说，相容性是至关重要的，如果不是就数学整体而言也至少是对它的某些部分来说，例如几何学。他的对手，之后遭受一些争议的布劳威尔，认为比起相容性来，真实性更为重要，而且他否决了归谬法论证。希尔伯特的形式主义在 1931 年遭遇了毁灭性冲击，当时哥德尔发表了数学逻辑基础的现代方法研究。他与布劳威尔就数学基础的争论演变得过于人身攻击化，而两位泰斗在此中都没有展现出他们最好的一面。然而就像亚力山德罗夫在自传中提及的：

我们有计划要为布劳威尔和希尔伯特进行调解。诺特的家被选为了晚宴地点。舒适的阁楼被用作书房，诺特的客厅和餐厅里坐着布劳威尔、希尔伯特、柯朗和兰道（Landau），周围围着一些年轻数学家，包括霍普夫（Hopf）和我本人。我的任务是将对话向和解的方向引导。众所周知，使两个人重归于好的最佳方法就是使双方都集中精力于一个对方都渴望批判的第三方。遵循这个原则，我把话题引导到了函数

理论家卢肯瓦尔德(Luckenwald)身上——那位因为一致性理论的研究而功成名就的人。这次运作所带来的成功远超我们的预期,很快希尔伯特和布劳威尔已经互相诚恳地进行高精神层面的意见交流,并且对第三方的看法越来越一致。他们始终友善地向对方点头。最终他们在互相敬酒中达成了共识。

可惜的是两人的和解并没有持续下去。随后就德国是否应该参与1928年的国际数学家大会出现了完全相对的争论。在几位有影响力的法国数学家,特别是皮卡的施压下,于1920年在斯特拉斯堡举行的战后第一届国际数学家大会上,先前同盟国的数学家们被纷纷排除在外。因此,斯特拉斯堡大会没有被普遍认为是系列大会中的一届。争论使数学界发生分裂。在法国内部,例如潘勒韦,也强烈反对皮卡的立场。在1924年多伦多数学家大会上,这些数学家被再次排除在外,但是经过激烈的争辩后,大家一致同意邀请这些数学家在下一届博洛尼亚数学家大会上参与进来。德国数学家们也因是否应该接受邀请而意见相左。布劳威尔所拥护的爱国派,认为这种邀请就是种侮辱,而如希尔伯特的国际派,则想把战争就此带过。

最终,枢密顾问希尔伯特,尽管健康状况不好,仍带着76人的德国数学代表团去了博洛尼亚。当他们走进礼堂时,大厅一时鸦雀无声,而后所有人都起立并鼓掌。然而,布劳威尔和一些其他数学家却无法见到德国如何能在"对高斯和黎曼的记忆、对数学科学的人文主义精神及对人类精神的独立性不被嘲讽"的情况下参加这场大会。希尔伯特的回应是把布劳威尔赶出《数学纪事》的编辑部,我们将看到,布劳威尔为此深受打击,因此建立了自己的期刊《数学论文集》(*Compositio Mathematicae*)作为回应。

至此希尔伯特最多产的岁月结束了。他被诊断为恶性贫血,在当时是一种威胁生命的病症:症状包括生理和心理上的,就如我们在李的案例中看到的一样。尽管希尔伯特通过伯克霍夫的斡旋,接受了哈佛

大学开发的一种新的治疗方法，但是从未痊愈。毋庸置疑，这影响了他在最后的职业生涯中的表现。他于1929年退休，即使他偶尔会继续授课。在格丁根大学，有一条街以他的姓氏命名，而柯尼斯堡，他的出生地，则授予他荣誉市民的称号。1932年，格丁根大学以火炬仪仗队的形式为他庆祝了70岁生日。1934年后他再没有踏入数学研究所。有一次，他在一个宴会上与新纳粹党教育部长毗邻而坐，据传，他的邻席问他，数学研究所在犹太人和他们的朋友们移居之后是否有所损失。"损失？"希尔伯特苦涩地回复，"并没有损失，尊敬的部长。它只是不再存在了。"

希尔伯特开始丧失记忆，而且似乎认为自己仍然住在柯尼斯堡。在经历了一段时间的老年智力衰退之后，他在1943年2月13日于格丁根逝世，那时纳粹掌权已达十年之久。时值战争中期，只有不到12人参加了他的葬礼。至于他全盛时期的肖像，1955年某个知他甚深的人写道："如果我是个画家，我能够画出希尔伯特的肖像，40年前当他站在人生顶峰时，他的容貌特征深深印刻在我的脑海里。我仍然看到那高高的额头，在镜片后炯炯有神的眼睛，由短短的络腮胡加重的线条硬朗的下颚，甚至是宽大的巴拿马帽，并且他尖锐的东普鲁士嗓音依然如在耳畔。"而那正是在这里展现的肖像画里他的样子。让我们用希尔伯特最有天赋的学生外尔的话来总结：

一位科学家在他有生之年的影响并不直接与他研究的科学权重成比例。当然，希尔伯特的数学工作极具深度和普遍性，且他巨大的影响力尚不能单以此而论。在精神高度上，高斯和黎曼当然不会比希尔伯特少，但他们没有在同辈中产生轰动，他们身边也没有形成一群忠诚的追随者。但希尔伯特生来就对生活充满了热情，寻求与他人的交往，尤其是与更年轻的科学家们，并且热衷于与他们交流思想。他的乐观，他的热忱，他对科学至高无上价值的坚定信念，以及他为简单而清晰的问题寻找简单而清晰的答案的坚定信心，会被永世流传。

第七章

从E·H·穆尔到高木贞治

我们接下来要讲述的6位数学名家生于1862—1875年这14年间。其中3位来自法国,另外3位分别来自德国、日本和美国。

E·H·穆尔(1862—1932)

现在是时候让我们跨越大西洋,去看看彼岸发生的事情了。当我们细数19世纪末之前出生的重要美国数学家时,发现能与欧洲大陆匹



敌的似乎只有寥寥数人。如果我们排除那些非美国本土出生的人士,例如莱夫谢茨(Lefschetz)、波利亚(Pólya)和扎里斯基(Zariski),可选之人就更加有限了。之后,我们会给出几位本土出生的美国人传略,他们毫无疑问能跻身一流行列——也许有一些人的研究成果不在一流行列,但因他们在此学科中的其他贡献而得此排名。其中一位就是伊莱基

姆·黑斯廷斯·穆尔(Eliakim Hastings Moore),他是少数几位对美国数学研究团体的发展产生重大影响的人物之一。美国许多20世纪前期的著名数学家都是他的学生或者是他学生的学生。在他的时代,他被认为是美国数学家中的领军人物。

戴维·黑斯廷斯·穆尔(David Hastings Moore)是一位具有学者风范的卫理公会牧师,除去牧师工作外,他在美国内战时期担任过(空军)中校,他还是辛辛那提卫斯理大学的校长、丹佛大学的发起人和第一任校长,以及上海美以美会*的主教。他和妻子朱莉娅·索菲娅[Julia Sophia),娘家姓卡彭特(Carpenter)]居住在玛丽埃塔,西弗吉尼亚州和俄亥俄州交界处的一个小镇,他们的儿子E·H·穆尔,未来的数学家,于1862年1月26日出生。他小时候一直都在搬家,但他大部分的童年是在俄亥俄州的另一个小镇阿森斯度过的。在那里,他富有的祖父不但是地方名流,而且还在华盛顿担任国会议员的职务。多亏这点,这位年轻人高中时就能在华盛顿以国会信使的身份度过了一个夏天(这是那些野心勃勃的年轻人在美国国会亲身经历它的运作方式的途径之一)。他用了另一个夏天在辛辛那提天文台担任台长助理,而那位主任唤醒了他对数学的兴趣。

1879年,17岁的E·H·穆尔进入了耶鲁大学,并于1883年以优异的成绩毕业,接着在1885年以一篇题为《n维几何中克利福德和凯莱定理的扩展》(Extensions of certain theorems of Clifford and Cayley in the geometry of n dimensions)的论文获得博士学位。数学家牛顿(H. A. Newton),他在耶鲁大学的导师,提供了他去德国学习一年的机会。1885年夏天,E·H·穆尔在格丁根大学学习德语,接下来的冬天,他在柏林大学听克罗内克和魏尔斯特拉斯的讲课。虽然他为魏尔斯特拉

* 美以美会(The Methodist Episcopal Church)是1784—1939年的一个基督教卫理宗教派,从1784年到1844年是在美国的卫理公会所使用的宗派名称,南北分裂后到1939年,是在美国北方的卫理公会所使用的宗派名称。该会属于新教的一个较大的宗派——卫斯理宗。——译者

斯严密的方法论所折服,但却是克罗内克的讲课对他产生了最为深刻的影响。似乎他还在莱比锡大学遇见了克莱因。

1886 年回到美国后,E・H・穆尔开始了他的学术生涯,第一年在西北大学担任讲师,之后的两年在耶鲁大学担任助教。1889 年他回到西北大学担任助理教授,并在两年内被提拔为副教授。随后,他与玛莎・莫里斯・杨(Martha Morris Young),他在阿森斯的幼时玩伴结婚。他们育有两个孩子,戴维(David)和伊莱基姆(Eliakim)。结婚前玛莎是俄亥俄州立大学的罗马语讲师;著名的数学家约翰・杨* 是她的兄弟。

1892 年,E・H・穆尔迎来职业生涯最重要的一步,芝加哥大学向 29 岁的他敞开了大门,校长哈珀(William Rainey Harper)挑选他成为该校数学系的代理主任。E・H・穆尔说服哈珀添补了两位一流的德国数学家:分析学家博尔查**和几何学家马施克***,两位都正好在格丁根大学,在克莱因的指导下获得博士学位后来到美国。E・H・穆尔是一位充满激情的热心人,聪敏并热切地关注他那个时代所流行的数学领域的研究动态;博尔查是魏尔斯特拉斯所领军的严谨的德国分析学派中的一员,是一位能力出众、博览群书的学者;马施克比另外两位更加游刃有余,在研究方面睿智和杰出,是一位十分讨喜的几何学讲师。拥有了这支队伍,芝加哥大学数学系几乎立刻就成为了美国首屈一指的系,而 E・H・穆尔很快就获得了常务主任一职。

然而就在这成功的开端之后,几乎紧接着又是一次机遇,而这更加巩固了芝加哥大学的重要地位,使之成为数学研究的中心。这就是芝加哥世界博览会,用以纪念哥伦布 1493 年发现新大陆 400 周年。伴随

---

* 约翰・杨(John Wesley Young,1879—1932),美国数学家,与维布伦一起发现了射影几何公理。——译者

** 博尔查(Oskar Bolza,1857—1942),德国数学家,克莱因的学生,以变分法的研究著称。——译者

*** 马施克(Heinrich Maschke, 1853—1908),德国数学家,以证明马施克定理著称。——译者

着博览会，一系列不同主题的“大会”也一并举行了。数学是众多主题之一，E·H·穆尔和他的同事被指定安排大会事宜。

尽管数学大会的规模不大，但有一些国外团队到会，而由克莱因带领的德国参会者尤其令人印象深刻。他被说动在大会之后再逗留一段时间，在西北大学进行一系列的讲座，对芝加哥大学的数学家们来说这是一项重要的策略，而这也有助于确保德国能够在美国的数学界散播其重大的影响力。这已成为克莱因近几年的任务，而他也得以在大会后向普鲁士文化部长报告，他的努力获得了成功，而两位德国数学家则留在了诸如芝加哥大学的一流大学成为教员，而德国学派的影响力将会被延续。

为了给大会纪要的出版募集资金，E·H·穆尔向纽约数学学会寻求帮助。双方一拍即合，同时学会决定更名，从纽约数学学会改为美国数学学会(AMS)。E·H·穆尔成为了芝加哥分会的第一任会长，并且还是学会副主席，越来越多地牵涉到学会的事务中去。在学会决定创办一份新的数学研究刊物《美国数学学会会刊》(*Transactions of the American Mathematical Society*)时，他成为了主编，并从一开始就设立了高标准的门槛。不久后，E·H·穆尔当选学会主席，成为第一位获此殊荣的中西部人，任职两年。他将学会看作维系课题高标准的主管机构，他还十分注重中学数学教育的质量。

1892—1908年期间，芝加哥大学在美国作为高等数学的学习基地，其地位是不可超越的。E·H·穆尔的一位学生写道：“在讲堂上，E·H·穆尔教授的教学方式违背了大多数教育学规则。那些规则实际上在他上高等课程时对他完全不起作用。他会全神贯注地进行数学讨论，不受任何其他事情的影响，不管铃声还是用餐时间，都不会让他轻易结束讲课。他只有在觉得那天的课题已经被探讨透彻时才会终止讲课。”

对那些优秀的学生而言，他是极为鼓舞人心的，而且能跻身美国最才华出众的数学家。在20世纪上半叶，从E·H·穆尔这里获得启迪

的人不胜枚举。在他的年轻时期,他是一名非常成功的教师。他与他的同事博尔查和马施克一起,发展出了新的数学授课方法。例如,他组织了一个数学俱乐部,在那里学生们阅读并展示期刊上发表的论文,并且尝试在这些材料上发展出新的理论,而 E · H · 穆尔会提出问题,有时候会作些评论。也许当他在德国时曾见过这种教学方式,但在美国却是全新的。我们可以看到,接受过芝加哥训练法的 R · L · 穆尔(Robert Lee Moore,与 E · H · 穆尔并无近亲关系)将它继承并发展成为一种强化研究训练制度,这使他在得克萨斯大学的研究生教学方面,特别是在拓扑学家的培养方面获得巨大的成功。

E · H · 穆尔在 40 年间指导了 30 位攻读博士学位者的论文,在他早期的学生中成名的有迪克森(L. E. Dickson)、伯克霍夫和维布伦。然而到了 1908—1920 年期间,早先的芝加哥大学数学系的热情与活力似乎逐渐流失了。马施克于 1908 年逝世,而他的同事博尔查也返回了德国。接下来的 10 年里,芝加哥大学数学系仍然是出色的,但是其内部升迁的趋势已有所显露,而到了 1920 年,它已不再跻身一流行列。E · H · 穆尔本人则逐渐投身于他所谓的一般分析,亦即一种准巴拿赫形式的几何分析之中,但是这种方法从未在外界引起过大量关注。他的数学系仍然平稳地输出博士生,但是大部分学生已没有当年的那些出类拔萃了。

尽管芝加哥大学的数学在很长一段时间内没有恢复到往日的声誉,但是却有一项重大的发展,即新大楼的动工,由一位当地商人出资,为数学系修葺大楼。埃克哈特大楼配有精美的公共休息室、图书馆、教员办公室,甚至研究生也有学习空间,以便他们与高年级的学生建立深厚的联系。尽管很快就被普林斯顿大学的范因大楼超越,但是埃克哈特大楼为数学系的硬件设施设立了很高的标准。E · H · 穆尔在职近 30 年,在埃克哈特大楼建成不久之后,他于 1931 年从主任的位置退休。之后几年他的健康状况并不理想,并于 1932 年 12 月 30 日在芝加哥去世,享年 70 岁。

不单单是对数学系,E·H·穆尔的能量与热情对整个芝加哥大学的早期发展都作出了巨大的贡献。在芝加哥大学之外,他的职业活动主要局限于美国,特别是中西部地区。E·H·穆尔作为组织者、教育者和研究者,因其杰出成就,在美国被授予了多项荣誉。在国外,他收到了来自格丁根大学的荣誉学位,并且在期刊《巴勒莫数学圈通报》(*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*)的编委会任职,庞加莱曾在上面首次发布拓扑学的研究成果。到世纪之交,美国数学"守得云开",这份努力可以追溯到当年的西尔维斯特及其先任,但最终,却是E·H·穆尔成就了这项事业。

德国对美国教育系统的影响总体来说是有益的,而这些影响主要在19世纪后期,希尔伯特和其他人对德国数学进行改革之前。比起格丁根大学的新式数学,柏林学派的旧派数学占了主导地位。应用数学直到第二次世界大战为止都在美国受到了忽视,但这显然不是克莱因的失误。

阿达马(1865—1963)

回到法国,我们将谈到本书中最富有同情心的人物之一。雅克-萨洛蒙·阿达马(Jacques-Salomon Hadamard)是一位杰出的多面手,不论是教学还是研究,他都面面俱到。他对科学的好奇心总是无法被满足。在他漫长的一生里,数学发生了重大改变,但他保持了与时俱进。阿达马1865年12月8日生于巴黎西南部的凡尔赛,是两位老师的儿子。他双亲的祖先都是犹太裔知识分子,从1808年开始定居巴黎。阿达马的父亲阿马德(Amadée)在查理曼大帝公立中学教授拉丁文,而他的母亲克洛德-玛丽-让娜[Claude-Marie-Jeanne,娘家姓皮卡尔(Picard)]则是一位出色的音乐教师。她在儿子的幼年时期就教授了他小提琴。



1871年巴黎公社*末期,他们发现居所被烧毁,而他们失去了所有的财产。当他们从这次挫折中恢复后,他们的儿子被送往了父亲任教的中学,除了不感兴趣的数学之外,他的每门功课都表现出色。尽管他在国家级竞赛考试中获得过其他学科的奖项,但最初他完全没有显示出数学方面的能力。不过到了1875年,当他的父亲被调任到更具声誉的路易大帝中学,小阿达马跟随他的父亲转学去了那里,并接受了更高质量的数学教学。他参加了数学优等生竞赛,并得到了全法国第二名的成绩,他的一生都在为没有获得第一而耿耿于怀。不久之后,阿达马开始在校刊上发表数学小短篇。随后他参加了巴黎综合理工学院和巴黎高等师范学院的入学考试。

这两所学校极难进入,一年里可能会有来自四五十个地区的成千上万名考生报考。举例来说,要报考巴黎高等师范学院,第一次入学考试会同时在全法国的大学和高中进行:第一天候选人将参加一场涵盖数学、物理学和哲学的长达六小时的笔试,而第二天他们要进行四小时的拉丁语翻译。这些考试的成绩出众者才会入选巴黎高等师范学院举行的最终的口试和笔试。这些候选人名单最终会按照成绩排名被公布出来。

1884年,18岁的阿达马在两个入学考试中均以全法国第一名的成绩脱颖而出,而他也面临了一个两难的抉择。到了19世纪下半叶,巴黎综合理工学院的数学教学质量已经有所下降,而巴黎高等师范学院的声誉已经提升。在一番挣扎之后,他效仿了20年前同样曾在两场考

* 巴黎公社是一个在1871年3月18日(正式成立的日期为同年的3月28日)到5月28日期间短暂统治巴黎的政府。——译者

试中以第一名胜出的达布的脚步，选择了更为学术派的后者。

1888 年从巴黎高等师范学院毕业以后，阿达马在卡昂大学挂了一个闲职，在巴黎多学习了一年。随后他在布冯公立中学任教三年，但并不成功。校长向教育部长汇报道："阿达马觉得自己超凡的数学能力会让他无所不能。"然而，在这所学校里有一位名叫弗雷歇的男孩却让他产生了特别的兴趣，弗雷歇很久之后对他说道："你在我成为数学家的过程中起到了决定性的作用。"弗雷歇的职业生涯会在之后的章节中讲述。

不上课的时候，他会撰写他的博士论文《研究由泰勒展开式定义的函数》(On the Study of functions given by their Taylor expansion)。当埃尔米特读了论文之后，他意识到最好能找到一些对此的应用。正好当时巴黎科学院宣布了一项以"黎曼 ζ 函数"理论为主题的比赛，而这篇论文符合要求。于是作为科学院授予的一长串奖项中的第一项，他自然地赢得了大奖。同年他与有着相似经历的青梅竹马的路易丝－安娜·特勒内尔(Louise-Anna Trenel)结婚。她是一位活泼的年轻女子，并与他一样热爱音乐。他们育有五个孩子，1894 年出生的皮埃尔(Pierre)，1897 年出生的艾蒂安(Etienne)、1899 年出生的马蒂厄(Mathieu)、1901 年出生的塞西尔(Cecile)和 1902 年出生的雅克利娜(Jacqueline)。孩子们从小就被灌输至少要掌握一门乐器的想法。有某个时期，阿达马一家与一些有着相同想法的学者家庭一起，在家培养教育孩子。不幸的是，他们在第一次世界大战中失去了长子，并在第二次世界大战中失去了幺子。

阿达马现在从中学升到大学任教。他的第一个大学职务是在波尔多大学，从 1893 年到 1897 年，也是在此期间，他证明了那个使他扬名的定理。他之前的研究领域为复分析，专注于奇点理论，而现在他将此应用于数论当中。许多数学家都在尝试寻找全体自然数中素数集稠密性的估值。使用复分析法，他和普桑(de la Vallée Poussin)一起独立发现了小于 n 的素数个数有 $n/\ln n$ 的渐近值。这个 1896 年发现的素数

定理一直未能得到一个基本证明,直到 1949 年,塞尔贝格*和埃尔德什**在没有使用复分析法的情况下才得以实现。

仅仅在他转到波尔多大学的两年后,阿达马便被任命为天文学和理性力学的教授。纵观他一生,他会定期参加巴黎科学院举行的各种竞赛,并经常获胜。他先以一篇论文《论动力学中轨迹的若干特性》(On certain properties of trajectories in dynamics)赢得了 1896 年的博尔丁大奖。两年后,他因前十年的研究成果被授予了彭赛列大奖,再下一年他获得了格丁根大学授予他的诸多荣誉学位中的第一个。

当阿达马一家享受着他们在波尔多大学时光的同时,他们也盼望着能回到法国的学术中心巴黎。五年后阿达马获得了一个巴黎大学的讲师职位,而且也被任命为法兰西学院的副教授。法兰西学院的教学任务并不繁重,但是课程里必须融入新的内容。不单单是上课的内容,甚至由讲师定下的课程名称也要经由正式批准。阿达马选择教授数学物理学,第一年侧重于动力学。尽管勒让德的《几何学基础》仍然被广泛使用,但是阿达马依据自己的教学经验,创造了另一种解决方案。

34 岁的阿达马在 20 世纪开启时充满了干劲和展望。也大概在那个时候,他在气体动力学的基础上开始研究偏微分方程。他的一位推崇者说这个理论是他天赋异禀的最佳证明。1901 年他生平第一次拜访美国,他在纪念耶鲁大学成立 200 周年之际作为巴黎大学的代表出席,期间他被授予了另一个荣誉学位。他又出版了两本书:1901 年的《泰勒级数及其解析延拓》(*Taylor series and its analytic continuation*)和 1903 年的《波传播及流体动力学方程讲义》(*Lectures on wave propagation and the equations of hydrodynamics*)。

1904 年,阿达马卷入了在科学界引起轩然大波的围绕选择公理展

---

* 塞尔贝格(Atle Selberg,1917—2007),挪威数学家。他的著名工作有解析数论,以及自守形式理论,特别是将之引入谱论的研究。1986 年获得沃尔夫数学奖。——译者

** 埃尔德什(Paul Erdös,1913—1996),匈牙利数学家。他是当代发表最多数学论文的数学家,也是全世界与各种各样不同国籍的数学家合作发表论文最多的人。——译者

开的有关数学基础的辩论。四年之后,他在罗马国际数学家大会上遇见了布劳威尔,就此达成了一个重要的科学共识。更多由巴黎科学院授予的奖项在此时颁发,包括多尔穆瓦奖、瓦扬奖和德尔克罗奖。1909年,阿达马离开了巴黎大学,到法兰西学院担任力学教授,授课内容有复分析及其在数论中的应用。两年以后,他被邀请至纽约的哥伦比亚大学授课,他选择微分方程理论作为课题,特别是由庞加莱展示的拓扑学在该理论中的作用,在课程中他声称:

拓扑学与所有的积分学相关。它成就了几何学向分析学的反攻。从笛卡儿开始,我们已经习惯于用数之间的对应关系来展现所有几何关系,而这为微积分学奠定了一种先天优势。许多数学家幻想着摆脱这种优势,并自认为相对于微积分学他们是纯几何学家,但是他们中的大部分都存在一种我无法认同的做法:在其他几何学家以更简便的微积分方式处理几何学问题的时候,他们限制自己只用几何学的方式来解决问题;显然,他们为了尽量不运用微积分,经常无法依据自己真正的科研兴趣来选择问题。我甚至不得不说,他们中的一些人在与完全无人问津的问题打交道,而正是由于无关痛痒,使分析学家将这些问题搁置一旁。

到了1912年,阿达马继任了若尔当在巴黎综合理工学院的教授职位。这一年庞加莱逝世,而阿达马抛下了手中的一切,为他的好友兼同事撰写生平及研究成果。阿达马是庞加莱的狂热崇拜者之一,他描述其为"那位绝世天才"。他就庞加莱的成就写了两篇研究报告,一篇刊登于《形而上学杂志》(*Revue de métaphysique*),另一篇刊登于《数学学报》。庞加莱的逝世使巴黎科学院出现了一个空缺,而先前多次成为备选人的阿达马,终于在47岁时入选。

法兰西学院不为教授提供办公室,所以阿达马主要在家里工作。每当他陷入困境时,他经常会去拉一下小提琴。他的女儿雅克利娜曾

描述他工作时的情形：

他实际上从不写字。他经常告诉我，他不用语言来思考，因此，对他来说最困难的事情是将他的想法诉诸文字。他只会写下方程，不是在桌子上，而是在一座高高的、以前用来摆放半身铜像（当然，在我祖母那时放的是贝多芬）的木制底座上。在过道里，当他走上走下的时候会写下他的数学方程。许多年里，我会听到母亲听写下那些句子："我们求积分——空——我们可以看到方程——空，空，空——等于零。采用这个形式——空，空，空，空。""空"的数量代表为公式所预留的空间。

阿达马一家总是很好客。第一次世界大战前夕对他来说是格外美好的一段时间：新的定理，讲课，珍爱的妻子和孩子们，以及朋友们和一幢充满音乐的舒适居所。他们会组成一个小型乐队；当爱因斯坦在巴黎的时候会加入他们，作家杜亚美（Duhamel）吹长笛，阿达马本人拉小提琴，而他的妻子用钢琴演奏剩余部分。他的儿子们都和父亲一样就读于路易大帝中学。他的长子皮埃尔在战争到来之际被巴黎综合理工学院录取，而次子艾蒂安在两年后被巴黎高等师范学院录取。这两位都在西方战线*的战斗中牺牲。接近战争尾声，阿达马最小的儿子马蒂厄，也命定地进入了巴黎综合理工学院，他被征召入伍，但被派往较不危险的意大利战线并且得以生存。阿达马本人参与了由博雷尔和潘勒韦负责的名为"发明的方向"的军事研究，而他的妻子路易丝则担任了护士一职。

到了1920年，阿达马被任命为巴黎中央工艺学校的数学分析教

* 第一次世界大战在1914年爆发后，德国入侵由比利时与卢森堡所开辟的战区，迅速占领了法国大片的重要工业地区，但战争形势因为马恩河战役而有了戏剧性的改变，双方沿着法国边境自北海至瑞士挖了一连串的壕沟实行阵地战，这条战线在战争大部分时间都未有明显的变动，此即所谓"西方战线"。——译者

授，在那里他一直执教到71岁退休为止，不过他在巴黎综合理工学院和法兰西学院的职位仍然被保留着。次年他发起了一个为期20多年、每周两次的研讨会，这个研讨会因为几乎涵盖所有的数学领域而愈趋闻名。世界上的一流数学家会去那里授课，而阿达马总会在接近尾声时对这些学术演讲的重要性和潜在性作出总结。在阿达马诞辰一百周年庆典上，他的弟子芒德布罗*回忆道：

周二和周五的会议肯定是两次世界大战之间全法国最紧凑最集思广益的会议。每位数学家，法国的或国外的，被这位显赫的大师邀请来讲述自己的研究，或单单就最新发布的研究抒发己见，大家都将此视为一种荣誉和业界的认可……大家带着自己最新的研究成果来到巴黎小住几日，向巴黎的数学界以及其他暂居的数学家们所组成的与会听众，尤其是阿达马展现成果……而阿达马经常能比被邀请来的该分支的专家更能够抓住该课题的精髓，将得到的结论与以前的结论相比较，有时还能在不同的数学领域中找到联系。

维纳也描述了所见所闻：

然而，法国的数学家们会遵循一种官方流程，当一位教授从他的小办公室退休，然后在他已教授课程的记录本上签字以后，通常他们就会从自己的学生和后辈同事们的生活圈中退出。阿达马在这种退出机制中成为了一个特例，他真正关心着他的学生，所以总是和他们保持着联系。他认为自己的很大一部分责任是要对学生的职业生涯作出提携。在他个人影响力的作用下，现今一代的法国数学家们成功打破了曾经横亘在年轻人与老一辈间的障碍。我本人也从阿达马广阔的大局观上

---

* 芒德布罗（Benoit Mandelbrot，1924—2010），法国数学家，他最大的成就是创立了分形几何。——译者

受益良多。在他事业的初期,阿达马没有理由要横跨大西洋,对这片未开化之地特别上心。毋庸置疑地,这源于阿达马的善良天性和每当他得到灵感时挖掘数学潜能的渴望。

1920 年,阿达马回到美国,在休斯顿新成立的赖斯学院讲解了庞加莱的早期研究,并且在耶鲁大学讲解了二阶双曲方程。后来那次演讲得以成就了另外一本书,著名的《线性偏微分方程中的柯西问题》(*Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*)。1925 年,他又来到耶鲁大学,讲述了庞加莱的后期研究。不单在欧洲,在其他地区,他作为演讲者在学术大会和其他场合里也同样炙手可热。他也曾经长期出访过中国和苏联。他对耶路撒冷迅速崛起的希伯来大学颇感兴趣,并加入了它的理事会和学术委员会。

他的《巴黎综合理工学院分析学教程》(*Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique*)第一和第二卷分别在 1927 年和 1930 年出版。这不是为了与若尔当及其继任者的传统课程竞争,而是希望课程能更面向数学家、天文学家和工程师。阿达马在花费大量时间和精力于教学的同时,在研究领域也保持了活跃,虽然他从不反复声明他早年取得的巨大成功。研讨会一直维持着人气,直到他在 1936 年退休。它的成功不仅仅归功于他杰出的数学天赋,还有他的真诚、人道主义和幽默感。韦伊(André Weil)写道:"那些熟知阿达马的人都知道,直到他漫长人生的终点,他都保持了格外与时俱进的想法和个性。在许多方面,他的反应就像一个 14 岁的男孩。他非常善解人意。"

1940 年法国沦陷后,阿达马一家逃到了美国。两年后他们搬去了英格兰,并在那里停留到战争结束,然后他们回到故乡巴黎,悄然度过余生。当他们逃离的时候,德国人将他们的公寓洗劫一空,家存的论文再也没有被找回。他此后的先驱性研究中,最著名的出版物是《数学领域中的创新心理学》(*The Psychology of Invention in the Mathematical Field*),他毕生都试着去了解数学家们如何得到他们的灵感。阿达马

的妻子路易丝在1960年去世。他们厮守了68年。他本人的健康状况也有所衰退，听力逐渐减弱，而且行走也有些困难。阿达马于1963年10月17日逝世，享年97岁，他被埋葬在拉雪兹神父公墓。那时他已经几乎囊括所有法国颁发的学术荣誉，以及许多国外的荣誉。他在90岁高寿时被授予了荣誉军团的最高荣誉——大十字勋章。

数学研究绝不是阿达马人生的全部。他有一种孜孜不倦的对司法正义的本能，他着迷于德雷福斯案件*，不仅仅因为受害者与他是远亲关系。这使他成为了一名共产主义同情者和公认的和平主义者。阿达马毕生还对植物深感兴趣，特别是真菌和蕨类，他拥有丰富的收藏。当沿西伯利亚大铁路跨越苏联的时候，他在每站都会下车寻找样本，直到他的妻子因为担心他会错过火车发车时间而发出警告为止。他喜爱登山，并为自己在60岁时登上博朗峰而自豪。他热爱旅行，几乎每年都会找个理由出访一个国家。

阿达马连续不断地工作着，撰写的文章涵盖函数论、变分法、数论、分析力学、代数、几何学、概率论、弹性学、流体力学、偏微分方程、拓扑学、逻辑学、教育学、心理学和数学史。在复变函数论的经典结论中，阿达马贡献了三圆定理、间隙级数和奇点乘法。在数论方面，他证明了素数分布的渐进律。在数学物理方面，他发现了适定这一重要概念。学生们学到关于幂级数收敛半径的柯西-阿达马公式。阿达马矩阵、关于行列式的阿达马不等式、关于格林函数的阿达马变分公式、双曲线方程中柯西问题解法的构造、确定固体声张量正性的勒让德-阿达马条件、水波的阿达马方程……他的成果不胜枚举。

---

* 1894年法国陆军参谋部犹太籍的上尉军官德雷福斯被诬陷犯有叛国罪，被革职并判处终身流放，法国右翼势力乘机掀起反犹太浪潮。此后不久即真相大白，但法国政府却坚持不愿承认错误，直至1906年德雷福斯才被判无罪。——译者

豪斯多夫(1868—1942)

在德国,犹太人只能慢慢获得全部的公民权利。解放犹太人的过程持续了将近100年,而且遭遇了相当的阻挠。在德国的犹太人和散居在别处的那些人一样,必须在两个极端的立场中做出选择。一个是继续维持隔离的犹太人社区,另一个是尽可能融入周围异教的环境中去。在德国的总体趋势是,犹太人在舍弃一些他们特殊的特征(例如,



雅可比和克罗内克进行了改变)后融入德国社会中。逐渐地,犹太人得以和其他公民平起平坐,1871年5月德意志帝国的宪法最终对此做出了明确。

接下来的60年里,这种情况得以持续,但当纳粹得势以后,他们立即引入了种族政策,特别针对了犹太人。在许多受此影响的犹太数学家之中,本书中的首例费利克斯·豪斯多夫(Felix Hausdorff),也是某种程度上来说最不幸的一位。和许多人一样,他误判了情况,并且留在德国直到情况无法挽救。他有着丰厚的文化底蕴,并撰写了现代数学的经典著作之一,在书中创建了集论拓扑学的基础。直到他逝世60年以后,学者们钻研了他的文章,他生活和学术研究的一些画面才开始浮现。

豪斯多夫1868年12月8日在西里西亚的省会布雷斯劳出生,那里被普鲁士统治了超过一个世纪。他的父亲路易斯·豪斯多夫(Louis Hausdorff)和大伯西格弗里德·豪斯多夫(Siegfried Hausdorff)是织物商人。他的母亲黑德维希[Hedwig,娘家姓蒂茨(Tietz)],来自那时普鲁士波森省的小镇比恩鲍姆。1772年普鲁士从波兰那里夺取了这块区域,这个家族被授予了土地,并在那里定居了超过50年。

所以豪斯多夫的祖先在近一个世纪的时间内是普鲁士的子民。这个新的帝国因战胜法兰西而创造了财富,并为犹太商人提供了新的商机。路易斯·豪斯多夫和他的家人搬到了莱比锡,在那里他们有了一位新的家庭成员,黑德维希的妹妹纳塔莉(Natalie),她嫁给了路易斯的哥哥西格弗里德。颇为富有的路易斯,成为了贸易期刊《纺纱者与织布者》(*The Spinner and the Weaver*)的出版商。他的儿子,未来的数学家费利克斯,就读于莱比锡的尼古拉文理中学,在那里他接受了全面基础的古典学教育。1887 年 3 月通过高中毕业考试之后,他离开中学并到古老的莱比锡大学进修天文学和数学。按照惯例,在九个学期中,他有两个学期在其他大学学习,分别是弗莱堡大学和柏林大学。除了数学和天文学,豪斯多夫还参与了种类繁多的其他学科讲座,例如神学、哲学、语言学、文学、音乐和社会学。1891 年,他以论文《论大气折射原理》(On the theory of astronomical refraction)在莱比锡大学获得了博士学位。接下来的一年他自愿效力于步兵团。无论新宪法如何表述,他发现犹太人很少会加入德国军队。

豪斯多夫继续着他的科学研究,在 1895 年发表了就职演说"论大气层对光的吸收"(On the absorption of light in the atmosphere),很快他就成为了编外讲师,他抱怨在莱比锡大学编外讲师遭遇了非人待遇。到 1901 年,他的工作,特别是新科目概率论的教学得到赏识,他因此被提升为副教授。值得注意的是,三分之一的教员因为豪斯多夫犹太人的身份对这个委任提出了反对意见,这是一个预兆(据我们所知,雅可比或克罗内克都未遭遇这种态度)。

1900 年,豪斯多夫与犹太医师西吉斯蒙德·戈德施米德(Sigismund Goldschmide)的三个女儿之一夏洛特·戈德施米德(Charlotte Goldschmide)结婚,而西吉斯蒙德是一位莱比锡大学的拉比*的儿子。西吉斯蒙德在幼年就失去了母亲。他的继母是一位出色的人物,她对

---

* 犹太人的学者。——译者

女性的教育和解放作出了很大贡献。西吉斯蒙德本人也是位成功改良的犹太人,他相信德国犹太人对文化的吸收能力。他的女儿夏洛特和西塔(Sitta)改入了路德教派,并在成人后接受洗礼。夏洛特和豪斯多夫成婚后不久,他们的女儿莱诺雷(Lenore)出生了,并也接受了洗礼。豪斯多夫本人从未接受洗礼,但这个家庭毋庸置疑可以被形容为“同化”了。

豪斯多夫一家的朋友和熟人包括一位律师、一位艺术出版者、一位文学教授、一位艺术家和一位诗人,当然还有很多其他人。这个广泛的社交圈映射出豪斯多夫最初的出版物与数学无关。其中有一出名为《医生的荣耀》(*The Doctor's Honour*)的戏剧,对为守护自身的荣誉而与人决斗这个传统的复苏进行了嘲讽,还有一篇晦涩的哲学文章《宇宙选择的混沌》(Chaos in cosmic selection),一本名为《宗教学》(*Ecstasies*)的诗集,一本受尼采(Nietzsche)的哲学启发的警句名言图书,豪斯多夫对尼采的理念非常感兴趣。这些作品都以笔名保罗·蒙格(Paul Mongre)出版,因为人们认为以区区编外讲师的身份来写这些东西并不恰当。这些作品绝不单单是业余的发泄,比如说那出戏剧,最后一次在柏林演出时,上演了上百场。

我们已经展现了那些年豪斯多夫家庭的生活片段。晚间是留给家人和朋友们的,除了有各自的陪伴还经常会有音乐演奏,豪斯多夫是一位出色的钢琴家,有时还会作曲。然后他会回到书房工作,喝一杯浓茶配雪茄。他的书房是一间密室,通常禁止外人入内。早晨,他的妻子会轻声对孩子们说:“嘘,爸爸在睡觉。”而不久之后,豪斯多夫会起床去大学上班。他极度敏感,也擅长让人沮丧。当他身为考官的时候,他的挖苦让学生们畏惧不已。

豪斯多夫的人生转折点出现在他开始熟悉康托尔创造的崭新的集合论时,康托尔当时在附近的哈雷大学任教。豪斯多夫与康托尔在莱比锡大学、哈雷大学和耶拿大学的定期数学家聚会上相识。如我们所知,这一新的理论遭遇了许多来自数学家和哲学家的反对。更多矛盾,

例如罗素悖论也开始在这个理论的基础概念中显现出来。然而,豪斯多夫追随着尼采的思想,深信科学往往建立在摇摇欲坠的基础上。

1910 年,豪斯多夫转到了波恩大学担任副教授,和莱比锡大学不同,那里给予了他终身职位。1912 年,他在那里教授集合论,并有了决定性的进展,将邻域的概念作为基本原理,对之后成为集论拓扑学的基础概念作出了定义。四年之后,他转到波罗的海的格赖夫斯瓦尔德大学担任正教授。1914 年,他完成了他的代表作《集合论基础》,这部著作使他举世闻名,并且对数学的几个分支的发展都起到了重要的作用。

在许多方面,《集合论基础》最独特之处在于豪斯多夫通过一组公理引进了拓扑空间,以邻域系进行描述。这部分内容在他之后简短许多的《集合论》(*Mengenlehre*)中被缩减,并多次出版。这个方法可以在希尔伯特、赫尔维茨、黎兹(Frigyes Riesz)、外尔和许多其他人的,特别是与流形相关的作品中被发现,然而唯有豪斯多夫被认定为集论拓扑学的奠基人。在他的定义里,他陈述了四条公理,最后一条在现今被称为豪斯多夫分离性公理,其阐述系统化且明确。德国、欧洲其他地区和美国的年轻一辈学者,以及大学高等数学的学生都曾研读这本书。

豪斯多夫当然知道阿达马的弟子弗雷歇 1906 年出版的论文。里面涉及抽象的一般拓扑学的第一条有效理论,在众多仍需要探寻的基础概念中出现了度量空间,还有完备性、紧密度和分离性的概念。最初是弗雷歇的理论在欧洲和美国产生了巨大的影响。然而到 20 世纪 20 年代中期,他的前沿性研究被豪斯多夫大量取代。尽管《集合论基础》在 1914 年出版,但是由于处在战争时期,弗雷歇直到五年后才有机会学习。那时豪斯多夫对拓扑学基础的处理已经相当成熟,而弗雷歇的研究则被大大忽视。为了改进他的方法,弗雷歇开始撰写一本关于抽象空间的一般理论的书籍,希望能成为函数论的入门书。不幸的是,它不是以教科书的形式撰写,比如说大部分的证明都被省略了。弗雷歇和豪斯多夫都是感性的人,不过似乎他们从未邂逅或通信联系过。

作为拓扑学的先驱,弗雷歇被年轻一代的数学家,例如建立了该理

论的亚历山德罗夫和谢尔品斯基(Sierpiński)尊为上宾,但他本人的贡献却对之后的发展没有起到太大作用。早先,巴黎科学院推迟认可弗雷歇的研究工作的原因之一是因为其抽象性。当时许多法国数学家觉得无法轻易将它联系到应用中去。况且,虽然法国比其他地方情况稍好些,但康托尔的集合论仍然充满争议。之后,又因为他单纯地执着于一个价值不明,却因豪斯多夫的理论而黯然失色的理论,巴黎科学院再次推迟对他的认可,他对此无法接受。在他年轻时,他与许多国外数学家建立了联系,特别是西欧那些拓扑学理论得以发展的强劲学派。值得一提的是,他在1929年被选入波兰科学院,但是直到1956年他才被选入巴黎科学院,虽然其间他经常被提名。

在《集合论基础》出版的数月后,欧洲被战争所笼罩。大量德国的学术精英和许多普通民众一样被爱国热情所感染。然而在1918年的革命之后,伴随着德国战败,那些精英们不再支持新的民主共和国。在格赖夫斯瓦尔德大学,大部分教授在战前都属于保守派,只有少数几位支持新政府。豪斯多夫在几年前成为了德国社会民主党的一员,虽然不太活跃。这是一个获得大量犹太人投票的支持魏玛共和国*的民主党派。可惜在经济环境恶化后,它的支持者减少了。

同时,豪斯多夫继续着他的科学研究,此时他的文学类活动已经几乎中止。他的巨著的出版使他能够与欧洲和美国所有地区的数学家们通信,年轻数学家尤其是东欧的可能前来向他讨教。他研究了一类测度,以及一种与之相关的可以假设分数值的维度。这些重要的概念被叫做豪斯多夫测度和豪斯多夫维数。直到最近,人们都认为他对急速发展的组合拓扑学毫无兴趣,但是与俄国拓扑学家亚历山德罗夫的通信却揭示了另一个真相。豪斯多夫被亚历山德罗夫通过对开覆盖的神经复形取极限值,将组合方法运用于一般拓扑空间的想法所深深吸引。

1921年,豪斯多夫回到波恩大学任正教授。最初,其他的数学教

* 魏玛共和国是1919年至1933年期间统治德国的共和政体。——译者

席是由斯塔迪(Study)统筹的;当六年后他退休,他的位置由特普利茨(Otto Toeplitz)接替,特普利茨的主要兴趣是数学教育。豪斯多夫与特普利茨相处得不错,但是他们的个性和科学兴趣却相差甚远。两位都是接受了德国文化的开通犹太人。特普利茨家族只舍弃了一部分犹太传统,他们家显然比豪斯多夫一家更像犹太人。有一次,当希尔伯特考虑一个教授职位的几位犹太候选人时曾这样评论,对他来说豪斯多夫并不太具有犹太人的特性:"如果你想要找一位非犹太人的数学家……你可以考虑比伯巴赫(Bieberbach)和豪斯多夫,对前者我完全没有兴趣。"(比伯巴赫后来成为了数学家中对纳粹执政的主要支持者之一。)

豪斯多夫剩下的职业生涯都留在了波恩大学,全家住在一条当时名为兴登堡街,现在叫做豪斯多夫街的安静街道上的舒适居所中。他是一位出色的老师,被认为是大学中最有能力的数学家。研究方面,他在波恩大学的第一个十年成果颇丰,他致力于发表集合论及集论拓扑学相关的论文。到了1932年,纳粹掌权。最初的三个月,第三帝国开始对犹太人、左翼知识分子和文化精英,例如音乐家、艺术家和作家进行攻击。之后还出台了涉及范围更广的有关公务员职业调整的法案。其目的是对政府部门进行重组,以保证对新政体的忠诚。它排除了州和市政业务的"不可靠分子"、共产党人、其他政治对手和犹太人。"非雅利安人"包括非雅利安人的后裔,特别是双亲及祖上为犹太人,同样适用于双亲或祖父母辈中任一为犹太人的情况。

这个法案适用于大学教授,因为他们是政府的雇员。因此,近1200位学者在1933年被遣散。当然,这个法案也意味着许多希望获得学术地位的年轻人受到了阻碍,而老一辈则需要决定如何应对。在波恩大学有17位学者受到了影响,但是也有例外,比如说那些曾在战争中效力的人和1914年8月前就已任职的人。豪斯多夫和特普利茨都符合后面一个条件,所以在这个阶段他们得以逃脱了解职。

豪斯多夫专注于他的教学和科研,直至近退休年龄的67岁。他在

大学的最后一个学期是 1934—1935 年的冬季学期，在那段期间所有公务员（包括所有剩余的犹太人）都必须宣誓效忠于希特勒。之后颁布了补充法令，用以区分拥有德国及相关血统从而成为公民的人，而其他人，例如犹太人则无此权利。以防表述不清，这里是指犹太人的公民权被废除，而当时被赦免的公职人员，犹太籍教授、教师、医生、律师和司法人员也在此刻失去了工作。于是特普利茨在 1935 年 12 月被解雇，并只领取了很小一部分退休金，而豪斯多夫则刚好到了退休年龄而享有了正常退休金。

纳粹的反犹太政策并没有一个清晰可辨的计划。通过追溯我们可以看到几个阶段，但是许多犹太人对局势有了误判，并错误地决定留在德国。不顾德国政府的压迫，年长的犹太人往往决定不移民。根据严苛的新法规，他们必须上缴所有积蓄，身上只留有 10 马克，并去国外试着重新开始生活。1933 年后的最初几年，许多犹太人移民到美国做教师，但要一位年老的教授在那里重新开始几乎是不可能的事情。在那个时候，欧洲国家只有在人们可以维持生计并且带来其所有财产时才会授予外国人居民身份。

第一阶段大约到 1936 年为止，那是犹太人被大量法律和法规羞辱、威吓和剥夺权利的时期。然而可能因为德国的经济仍然岌岌可危，许多重要的犹太公司被允许继续运营，然而一些不太重要的公司，包括豪斯多夫的出版业务，则被“雅利安化了”。直到那个阶段，据豪斯多夫所说，退休的犹太学者的生活“还没有完全不可忍受”。豪斯多夫的态度是随波逐流，而特普利茨则要更积极主动一些。他的行动之一是为在国立学校中受尽欺辱的犹太孩子建立一所私立学校。他仔细观察了大学里的情况。他察觉到了前同事们甚至是朋友们的冷漠态度。特普利茨对将要到来的事情颇有预见。

第二阶段是从 1936 年直到第二次世界大战爆发。其目的是让犹太人无法在德国生活而迫使他们移民。比如说他们的财产被大量充公没收。这个想法是为了让富有的海外犹太人将资金用于资助移民的犹

太人并因此贫困。然而,世界上的其他地区却没有准备好接受从德国涌出的大量难民。比如说特普利茨,就想尽办法移民到巴勒斯坦,最终他成功了。

1938 年 11 月 9 日,“水晶之夜”* 大屠杀,犹太教会被大规模焚毁,犹太人被殴打和拘捕,他们的家和财产被摧毁。这发生在豪斯多夫与亲朋好友共同庆祝他 70 岁生日的第二天。那晚一个暴徒冲进他的家大叫:“他在这里!拉比头子。看着吧。我们会把你送到马达加斯加,到那里你去给猩猩们上数学课吧。”豪斯多夫大为震惊。纳粹继续颁布一系列冲击性的反犹太人法。犹太人不得不终止他们的商业行为,并且要将他们的投资和财产卖给国家,而且,大笔的罚款也被强加到犹太社区里。不久之后,所有的集中营里都住满了从家里抓来的犹太人。次年,颁布了法案要求征集所有居住在德国的犹太人名单。许多人被强迫改名,所以费利克斯·豪斯多夫成为了费利克斯·伊斯拉埃尔(Felix Israel),而他们也被授予了新的身份证明文件,上面敲了一个字母 J。

豪斯多夫继续研究数学,但是停止了出版工作。1939 年初,他给在纽约的柯朗写了一封“简短但感人”的信件,询问到美国带薪研究的可能性,但是没有结果。流放已经在进行中,而到 1941 年,“最终解决方案”** 开始了。人们试着去解救豪斯多夫,但为时已晚。有一段时间他们被允许在家里生活,等待他们的判决,但是 1942 年 1 月,他们被命令搬到安德尼希近郊的修道院里,那里关押着其他早先被拘捕的波恩大学的犹太人,他们等待着被流放到特莱西恩施塔特集中营。豪斯多夫和他的妻子夏洛特平静地选择了死亡,1942 年 1 月 26 日,他们服用

---

* 水晶之夜(又称帝国水晶之夜、碎玻璃之夜、十一月大迫害)是指 1938 年 11 月 9 日至 10 日凌晨,希特勒青年团、盖世太保和党卫军袭击德国和奥地利犹太人的事件。“水晶之夜”事件标志着纳粹对犹太人有组织的屠杀的开始。——译者

** 最终解决方案是第二次世界大战期间纳粹德国针对欧洲犹太人的系统化种族灭绝计划。希特勒把它称作“犹太人问题的最终解决方案”。——译者

了过量的佛罗拿(一种镇静药),那时他73岁。

嘉当(1869—1951)

我们这一个传略的主角,是继庞加莱和希尔伯特之后数学界的又一巨匠之一。



埃利·约瑟夫·嘉当(Elie Joseph Cartan),1869年4月9日出生于多洛米厄,位于里昂和格勒诺布尔之间的多芬地区的一个大村庄。他的双亲均为农民。他的母亲安妮·科塔(Anne Cottaz)是多洛米厄当地人,而他的父亲约瑟夫·嘉当(Joseph Cartan)来自临近的另一个村庄,在多洛米厄做铁匠。未来的数学家在四个孩子中排行第二。他的姐姐让娜-玛丽(Jeanne-Marie)是一位裁缝,他的弟弟是一位铁匠。他的妹妹安娜(Anna),从巴黎高等师范学院女校毕业以后在各个公立中学教授数学,她还是两本成功的数学教科书的作者。

嘉当在村庄里的一所小学开始接受教育,并广受老师好评。其中一位老师回忆道:"他是个害羞的学生,但是他的眼中闪烁着与众不同的智慧光芒,而且与之相衬的是他出众的记忆力。对他来说没有所谓的难题,课堂上教授的所有东西,甚至在老师解释完之前他就能领会。"他没有父亲与兄弟的体型,个子矮小。

他成为最著名的法国科学家之一,是由于当时的年轻政治家、之后成为司法部长和参议院议长的迪博(Antonin Dubost)来校视察。嘉当形容他非常乐观,对发展深信不疑,有着智慧的力量,对发掘真理充满希望,并做得不错。后来嘉当写道:"他的来访改变了我整个人生。"被这个男孩的出众能力所吸引,迪博建议他试着去赢取一份能够支持他就读某所公立中学的奖学金。嘉当在10岁时成功获得了旧时多芬地

区首府维埃纳的维埃纳学院的奖学金。

在维埃纳学院学习5年之后,年轻的嘉当被送到如今的省会格勒诺布尔的学校就读两年,接下来的一年他在巴黎的德萨伊中学进修数学科学,他在那里的一位同学佩兰(Jean-Baptiste Perrin)之后成为了法国最著名的物理学家,也是他毕生的好友。19岁时,嘉当已经决定要成为一位数学家,他进入巴黎高等师范学院就读。嘉当指出,在那里和在巴黎大学时期对他最有影响力的讲师有埃尔米特、塔内里(Paul Tannery)、达布、阿佩尔、皮卡和古尔萨(Goursat)。我们可以看到他们对他之后研究的影响痕迹,但最有力的影响理当归属于庞加莱,是他把嘉当的注意力引向了群论的几何应用。

从巴黎高等师范学院毕业后,嘉当被法国军队征召入伍一年,获得了中士头衔。同时他的好友兼同学特雷斯(Arthur Tresse)则和当时的一些法国数学家一样,用了一年的时间在莱比锡大学师从李。嘉当也开始对李的研究产生了兴趣,并在1892年李受到达布和塔内里的邀请至巴黎大学进行为期6个月的访问时得以与他见面。嘉当回忆说,李"带着美好的善意,协助法国年轻数学家的研究",而且那个时候人们经常可以看到李和他们围坐在圣米歇尔大街上的苏尔斯咖啡馆的餐桌边。"这并不反常,"他继续说道,"在白色的大理石桌上铺满了用铅笔写下的公式,这位大师用它们来举例说明自己的观点。""李,"他说,"外形高大,有着典型的北欧人长相,金色的络腮胡,镜片后闪烁着蓝灰色的眼睛。在认识他的真挚和赤诚前,人们就已经能立刻感受到他的平易近人。后人只会视他为那个创立了变换群理论的天才,但是我们法国人却无法忘记他与我们的情谊,使得关于他的回忆变得格外亲切。"

现在基林加入到故事中来,他在魏尔斯特拉斯的指导下获得了博士学位,他还受到库默尔影响,在他当了14年的教师之后。1882年,由魏尔斯特拉斯推荐,他被位于东普鲁士的城镇布劳恩斯贝格的一所罗马天主教大学聘请为数学教授,10年后他转到了家乡威斯特伐利亚

的明斯特大学担任相似职务。在那里他撰写了在《数学纪事》上刊登的经典研究报告《变换的有限连续群结构》(The Structure of the finite continuous groups of transformations)。这篇文章里列举了所有在复数范围内的有限维李代数。出版之后文章里被找出了一些错误,李极不认同基林的这篇文章,并建议他的学生不要阅读。

在之后的两年里,通透地学习了基林的论文后,嘉当开始坚信,除去一些不够精准和完整的表述外,它大体上是准确的。在他的博士论文里,他使用了强大的基林的方法,避免了他的错误,给出了单李群的精确分类。他的论文《变换的连续群结构》(*The Structure of continuous groups of transformations*)被出版成书。之后,顺理成章地,嘉当的名字也逐渐与这一理论中的一些关键概念联系起来,例如嘉当整数和嘉当代数,这些概念其实来源于基林,尽管他的一部分论证仍存在一些错误。然而毋庸置疑地,大量的数学运算归功于嘉当。

嘉当的职业生涯起始于 1894 年,他在蒙彼利埃大学担任了两年的讲师,之后的 7 年在里昂大学担任讲师。1903 年,在里昂大学时,他与玛丽 - 路易丝・比安科尼(Marie-Louise Bianconi)结婚,比安科尼的父亲出生于科西嘉岛,是尚贝里大学的化学教授,并且还是当时里昂的"学区督学"。同年,嘉当成为了南锡大学的教授,到 1909 年他转去了巴黎,首先在巴黎大学担任讲师,到 1912 年成为教授。1915 年,在他 46 岁之际,嘉当被召回军队,并在巴黎高等师范学院附近的一家医院里服役。1917—1936 年期间,他们一家人住在当时凡尔赛边的小镇勒谢奈。之后他们搬去了巴黎。除了在波特奥林斯酒店旁买了一间公寓之外,嘉当还在他的出生地多洛米厄造了一幢房子,全家人通常会去那里度假。

嘉当研究的主要切入点是黎曼几何学。他所引入的全局法使整个学科得以复苏,并且为以纤维丛概念为基础的现代方法铺好了道路。许多年来他发现自己时常独自工作;而他在这段时间中颇为孤立的部分原因是其本人极度腼腆,还有一部分原因是 20 世纪早期法国数学家

的主要着重点在于分析学，而非几何学。整个局势在 20 世纪 20 年代，当外尔开始对嘉当的研究产生兴趣时发生了改变。直到那时，嘉当才开始以数学界巨匠之一的身份获得认可。比如说李，他作为一名几何学家，试着想要弄明白连续群的行为。当李怀揣着大量的想法时，嘉当则有着更为强大的技巧来解决其理论的代数部分，这些技巧源自于格拉斯曼的前沿成果的激发。主要是嘉当，之后是外尔，将李的理论进行了拓展和应用，并使之成为了现代数学的一个基础部分。

1940 年嘉当从巴黎大学退休，他的余生都在巴黎高等师范学院向女性教授数学。他在久病之后于 1951 年 5 月 6 日在巴黎逝世，享年 82 岁。在许多其他学术荣誉中，其中一项是他在 1931 年被选入巴黎科学院。四个孩子中，埃莱娜(Helene)成为了费内龙中学的一名数学教师，让(Jean)是一位作曲家，但因为肺痨而英年早逝。路易(Louis)是普瓦捷大学的一位物理学家，第二次世界大战期间他活跃于抵抗运动，在被关押了 15 个月之后被德国当局斩于断头台，享年 34 岁。亨利(Henri)，四个孩子中唯一的幸存者，是他的时代最为重要的数学家之一，以在势能理论、代数拓扑学和多个复变量函数理论方面的研究而闻名于世。

在他 1940 年所做的一次演讲中，嘉当对数学作出了以下的评论：

更甚于其他学科的是，数学的发展经历了一系列连续的抽象过程。对于避免错误的渴望迫使数学家们寻找并分离出所思考的问题和实体的本质。极端化来说，这种过程佐证了那个众所周知的笑话：数学家就是这样一类科学家，他们既不知道自己在说些什么，也不知道他们所讲述的内容是否存在。然而，法国数学家从不喜欢将他们自身与现实分离；他们很清楚，逻辑尽管十分必要，但绝对不是决定性的。与其他人类活动一样，在数学活动中，人们应该找到价值的平衡点：毋庸置疑，正确的思考十分重要，但是更重要的是正确阐明问题。从这方面来看，人们可以坦然地说，法国数学家不仅总是明白他们在说些什么，而且能够

准确判断并选出最基本的问题,而这些解决方法对科学整体的发展产生了最重大的影响。

博雷尔(1871—1956)

费利克斯·爱德华·朱斯坦·埃米尔·博雷尔(Félix Edouard Justin Emile Borel),在这一长串被讲述的杰出法国数学家中的最后一位,是20世纪最有影响力的数学家之一。他在若干数学领域,特别是



复分析方面作出了精湛的研究,而且更有甚者,由于他大受欢迎的写作风格和他所参与的学术、政治活动,他脱颖而出成为数学界的一位公众代表。他对数学的观点以及如何对其进行支持的看法,在法国与之相关的国家政策上有着重大影响。

圣阿夫里克是法国西北部的一个小镇,隶属于阿韦龙省。奥诺雷·博雷尔(Honore Borel),新教改革教会的牧师,是临近城镇蒙托邦一位工匠的儿子,工匠的妻子埃米莉[Emilie,娘家姓泰西耶-索列尔(Teissie-Solier)]来自当地一家布料富商。他们的儿子费利克斯,常被简称为埃米尔,出生于1871年1月7日。他是家里最小的孩子,也是唯一的儿子。他的两位姐姐都比他年长不少。博雷尔一家住在一幢18世纪的大房子里,房子是牧师用来给附近新教家庭的孩子们做学校用的。未来的数学家就是在那里开始接受教育。12岁时他被送到了蒙托邦的一所公立中学,并在那里和姐姐住在一起,他姐姐当时嫁给了一位叫做勒博(Lebeau)的新教牧师。

离开了蒙托邦,年轻的博雷尔前往巴黎的圣巴贝尔学院。他在那里听了著名的路易大帝中学课程,为竞争激烈的巴黎高等师范学院和

巴黎综合理工学院入学考试做准备。从一开始博雷尔就展现了早熟的才华，到18岁时，和之前的达布及阿达马一样，他被这两所大学都列在了录取名单的第一位。而且，和当年获得第二名的阿达马不同，博雷尔还赢得了1889年全国数学优等生竞赛的第一名。

博雷尔和当时同所中学的达布的儿子成为了好友，并且受到了达布家族的欢迎。后来他回忆道："位于盖－吕萨克街的简单的五楼公寓向这个带着赤诚之心的年轻农村男孩敞开了大门。我在那里学到很多事情，特别是巴黎高等师范学院不单单是教师的摇篮，而且还为科学研究提供了准备。我开始向往一种因投身于研究的生活方式所带来的知识上的满足。"更甚于巴黎综合理工学院，巴黎高等师范学院是法国知识精英的摇篮，一个全国最聪明最有天赋的年轻人得以用高度程式化的三年时间，在一个由学者们紧密联系起来的团体中一起学习、辩论和社交的地方。所以，尽管家人和朋友们强调着巴黎综合理工学院所带来的职业优势，博雷尔还是追随了达布和阿达马的先例，选择了巴黎高等师范学院。博雷尔在这里建立的许多友谊为他后来广泛的文化政治活动提供了先决条件。他在1892年毕业，结束了辉煌的学生生涯后，同年在教师会考中拔得头筹。那一年他还发表了自己的第一篇主题由达布提议的内容充实的研究报告。

两年后，博雷尔在他的论文里开始引出一条完全独立的路线。他属于那种在论文中几乎涵盖之后所要开发的大多数理念的数学家之一。1895年，以朴素的题目《关于函数论的一些观点》(*Sur quelques points de la théorie des fonctions*)为题出版的论文在第一时间吸引了全世界的注意力。尽管文章不超过50页，但观点极其丰富。他的测度论、发散级数理论、非解析延拓理论和拟解析函数理论均是从这篇论文中首次面世的观点里引申而出的。

博雷尔和蒙彼利埃的一些工程师们一起避开了兵役，并且似乎没有因此完全放弃数学研究。1893年，他就已经收到了第一个学术任命，里尔大学的讲师。在里尔大学的四年硕果累累：22篇已出版的研

究论文和其他一些仍在出版过程中的成果。然后，到了 1897 年初，他回到了他的母校。尽管他的根在西北部，并且他对圣阿夫里克的感情至死不渝，但他的余生都以巴黎为基地。

这篇论文后紧跟着又有了几项重要的成果。1896 年初，博雷尔关于发散级数求和的第一篇研究报告发表了，接着 1899 年发表了著名的发散级数研究报告，这是第一篇关于这个科目的系统性处理方法，并获得了 1898 年巴黎科学院颁发的大奖。也是在 1896 年，他发现了一个关于本性奇点附近亚纯函数取值的皮卡定理的基础证明。这个发现在当时造成了极大轰动，因为自皮卡 17 年前发现这一重大结论开始，人们一直在寻求它的证明。博雷尔的方法，开创了解析函数取值分布的度量理论，并在次年《数学学报》上刊登的他的重要研究报告《论整函数的零点》(On the Zeroes of entire functions)中被发展得更为完整。这在超过一个时代的数学家里成为了函数论的一个主题。

1898 年，博雷尔出版了第一本同时也许是他最具影响力的书，《函数论专集》(*Lectures on the Theory of Functions*)，此书以他在巴黎高等师范学院上课时所用的讲义为基础。前三章里博雷尔首次以各种语言、各种形式，给出了教科书式的集合论描述，在第三章的最后部分，他首次详细解说了他的测度论，明确定义了可测集(我们今天所称的博雷尔集)，而这也使这本书分外有用和重要。该书的其余部分则更像是他以往论文的重现。以《函数论专集》为首，博雷尔出版了一系列丛书，名为《博雷尔全集》(*Borel Tracts*)。本来这些书博雷尔准备全部由自己执笔，但最终出版的约 50 卷书里他亲自执笔了 10 卷。该系列丛书对最新及最具话题性的研究作了有序的论述，因此对当时的数学界意义重大，特别是在实函数和复函数中应用集合论，这些是在当时还未被熟知的理念。

博雷尔本人也向我们讲述了一些他的理念的来源和发展过程。“总的来说是埃尔米特的课促使我向函数论的方向发展，”他写道，“通过他我学习并崇敬着柯西，而且在我更深入地了解到这位伟人实际上

是现代分析学创始人时,这种崇敬更为加深。带着对柯西的崇敬,我内心升起一种维护他的渴望,主要在于:证明魏尔斯特拉斯以幂级数的连续性所定义的解析函数的概念不及柯西基于导数存在性的单演函数的概念更通用。"这个在现今被普遍接受的理念,在当时却有些离经叛道。

在他的科学事业50周年庆典之际,博雷尔先讲述了在早年给予他影响的几位数学家,之后继续说道:"我在20岁读完康托尔的作品后完全着了迷,之后在1897年苏黎世国际数学家大会上,我有幸与他相识。"尽管康托尔的作品在某些领域和单独需要应用到集合论的情况下被知晓和推崇,例如在庞加莱的自守函数理论中,但是直到博雷尔、贝尔*和勒贝格为实变量的现代函数论开启了一条新路之前,这些工作并没有重大意义上的发展。

第一个突破是博雷尔的测度论。他的方法和勒贝格的一样,主要是度量式的,而贝尔的方法则更倾向于拓扑式。之后关于勒贝格和博雷尔之间优先权的争论让博雷尔十分忧虑和不快。勒贝格出面维护说:"博雷尔没有完成测度论,但是他为此铺好了基础。这让我方便地在需要时根据博雷尔的大纲完成理论并付诸应用。"尽管勒贝格确实改进了博雷尔关于如何定义积分法的观念,但是他并不愿意将发明测度这个概念归功于博雷尔。他们两个似乎都没有意识到20年前是史密斯在积分理论中提及了关于测度的概念。

博雷尔从很早就开始了行政管理的学习,而这占据了他之后很大一部分时间和精力。当他回到巴黎时,他成为了法国数学学会的秘书,并担任了其简报的编辑。他在1905年担任学会主席一职。博雷尔是1897年苏黎世召开的第一届国际数学家大会的秘书之一。1900年,他被任命为巴黎船舶学校的招生主考官,他保留了这个职务直到1910

---

* 贝尔(René-Louis Baire,1874—1932),法国数学家,最有名的成就是贝尔纲定理。——译者

年，而这也是他25年之后成为部长前的第一个正式的官方工作。1901年10月，他与同事阿佩尔的女儿，17岁的玛格丽特（Marguerite）结婚。除了在多方面协助丈夫之外，她本人也是一位成功的作家。她以笔名马尔博（Camille Marbo）撰写了超过30本小说，并成为了文人协会的主席。他们两人没有孩子，但是博雷尔一家在他的侄子费尔南・勒博（Fernand Lebeau）的双亲去世后，将他领回家认作了养子。

之后的几年里，博雷尔的作品大部分以之前所作的前沿性研究的拓展与开发为考量。他从巴黎科学院又获得了三个奖项。最后一个奖项，1905年颁发的佩蒂特大奖，使他有足够的资金创立了一本名为《每月评论》（*la Revue du Mois*）的期刊，首次于1906年发行，并在最初获得了巨大成功。在博雷尔的指导下，这本刊物吸引了著名作者的投稿，其话题包罗万象，决不仅仅是科学方面的。不幸的是，由于第一次世界大战爆发，期刊遇到了资金上的困难，并于1920年停刊，而让博雷尔失望的是，它没有再恢复出版。

大约在创办《每月评论》的时期，博雷尔已经有了近百份出版物，并开始反映出他广泛的涉猎范围，特别是在概率论方面。1905年，他同时出版了一本卖座的书和第一篇关于概率论的研究论文，其中包含如下重要意见：以概率论的语言能方便地讲述点集的测度。四年之后他引入了可数集事件概率的概念，由此填充了传统的有限概率和“几何”（连续）概率间的鸿沟。在1909年出版的同一篇论文中，他证明了强大数律的一个特殊情况。但是博雷尔始终对实无限是否超越了可数和非构造性定义持怀疑态度。出于这样的谨慎态度，他避免了一些其他人误入过的陷阱，但他也因为没有大胆尝试而失去了获得丰厚成果的机会。是勒贝格、贝尔、弗雷歇和其他人更为大胆地开发了集合论和测度论的理念，从而在20世纪中期为抽象分析开辟了道路。

博雷尔的主要兴趣仍然维持在传统分析上。在他的论文里提到的关于通过足够小奇点障碍的函数延拓可能性的广义问题，仍然在等待一个令人满意的解答。1909年，他得到了巴黎大学创立的一个函数论

教授的职位。1910 年，在巴黎高等师范学院担任科学督导 26 年的塔内里突然离世，博雷尔被任命为他的继承者。他认为这是至此他职业生涯中最重要的事件。作为自巴斯德（Pasteur）之后此职位最出名的继任者，他说搬入这个办公室到战争爆发的 1914 年，这四年期间是他人生最快乐的时光。表面看来，在他职业的巅峰时刻，博雷尔不但愿意掌管学科的研究方向，同时还负责管理学院的数理科系，这似乎让人吃惊，但他似乎毫无犹豫。“一种传承下来的荣誉”是他对这个委任的描述。这个职位是需要驻地的，所以博雷尔夫妇携他们的养子离开了位于阿拉贡大道的家，搬去了位于巴黎高等师范学院的官邸。

来看看博雷尔作为讲师时的画面，在巴黎大学最大的阶梯教室之一里坐满了听众，著名的英国分析学家科林伍德（Edward Collingwood，之后的爱德华爵士）回忆道：“他有着严肃的作风，但是讲课的风格生动甚至鲜活，他所说的语句至今让我记忆犹新。讲课在有序的掌声中结束。这是一段令人振奋的经历。他无疑可以极具威严。但是作为一个年轻的外国人，我总是记着他的友善，我在他位于巴克街的公寓受到招待，并在巴黎驻留的时间里得到他的帮助和建议。知识的力量和权威所带来的印象总是让人记忆犹新。”

1911 年，博雷尔一家被卷入了一起著名的诉讼案。有一阵子玛格丽特开了一家沙龙，巴黎一些年轻的科学家会定时聚会，包括刚离开妻子的物理学家郎之万* 和著名的化学家居里夫人（Marie Curie），她当时刚失去了自己的丈夫。他们当时进行的是颇为正常的会面，而媒体却获得了一些居里夫人写给郎之万的轻浮信件。他们私奔的（非真实）故事在巴黎流传，并且马上扩散到全世界。几天后，一封来自瑞典斯德哥尔摩的电报声称，居里夫人被授予了诺贝尔化学奖（此前她与丈夫共享了诺贝尔物理学奖），这为她引来了更多的公众关注。随后

---

* 郎之万（Paul Langevin，1872—1946），法国物理学家，主要贡献有郎之万动力学及郎之万方程。——译者

她写给郎之万的信件摘要被出版。居里夫人为此心力憔悴,她开始考虑轻生。玛格丽特将她送去巴黎高等师范学院,在那里她可以躲避记者。教育部长对博雷尔说,他不应该将她收留在那里。自始至终都坚定维护居里夫人的博雷尔的岳父阿佩尔,那个理学院院长,也因博雷尔家牵扯进此事而大为光火,他和其他人,包括居里夫人的一些家人都认为她应该回到她的故土波兰。最终她决定坚强面对,前往斯德哥尔摩亲自领取诺贝尔奖章。

1914 年 8 月,战争的爆发标志着博雷尔第一阶段事业的结束。这并不是一门课程以让人不悦的方式被打断之后再得以恢复,而是其模式被永远改变了。多种影响同时起了作用。除了生出新的研究方向之外,还有新的事业。1910 年,他发表与潘勒韦合写的第一本大众读物《航空》(*l'aviation*)。这本书是新的系列《新科学》(*La nouvelle collection scientifique*)的第一本,这份编辑工作是他给自己布置的新任务。1914 年,同一系列还出版了他著名的小读物,关于机会对策的《骰子游戏》(*Le hazard*)。同年他出版了一系列图书,包含了一个简短的相对论讲座和他之前关于数学物理学的作品合集,其中包括了以《用几何方式介绍一些物理理论》(*Geometric introduction to some physical theories*)为题,论及气体动力学理论的作品。同时他在函数论方面的研究,因为 1912 年他的非解析单演函数理论的出现而更趋完备,五年后终于得以成书。

第一次世界大战初期,博雷尔组织了一个声波测距定位项目,一部分在巴黎,一部分在前线,而他的妻子玛格丽特则负责掌管一家医院。在法国,年轻的科学家们被送往前线,而在英国和德国则不然。潘勒韦成为了战争总指挥,并指定博雷尔担任发明部主任,这个部门是军事研究的核心部门,参与其中的还有如阿达马等的数学家。后来,作为总理的潘勒韦任命博雷尔作为内阁秘书长协助他的工作。当潘勒韦政府倒台后,博雷尔一度回到前线,但这段经历使他关心起了公众事务。

战争结束后,博雷尔恢复了在巴黎高等师范学院的职责。战争摧

毁了他一半的年轻师范生"家庭"——其中之一是他的侄子和养子费尔南·勒博,一位充满前途的物理学家。长长的回廊里有着太多的冤魂,他说,所以在1920年他辞去职务,接受了名誉主任的称号。同年他还交出了函数论与概率论的教授职位,以及曾经由庞加莱担任的数学物理学教授职位。在战争前就已出现的重要变更就此尘埃落定。此事在1922年《博雷尔全集》系列的第九册,名为《函数论的方法及问题》(*Methods and Problems of the Theory of Functions*)一书发行时敲定。他在前言里写道:这也许是他关于函数论的最后一本书。本书是之前发行的论文附加上简短批注的合集。实际上他正式地将其在函数论上所有的个人所得集合在一起,并将它们传承给了他的继承者们。

博雷尔对他新职位的野心在1921年竞选巴黎科学院院士时展现得淋漓尽致:"对我来说,要将50年来对概率论及其应用所做的研究进行整合似乎是必不可少的一步,而这必须建立在帕斯卡、拉普拉斯和庞加莱所建立的沃土之上,"他写道,"我愿尽自己所能来试着对此作出贡献。"其成果就是从1925年至1939年陆续出版的《概率演算及其应用丛书》(*Traité de calcul des probabilités et de ses applications*)。对丛书作出补充的还有一系列关于概率论的研究课题及当前发展的专题论文。博雷尔协同谢龙(André Cheron)一起,凭借该系列专题论著对1940年《桥梁的数学理论》(*Théorie mathématique de bridge*)的出版作出了巨大的贡献。

《概率演算及其应用丛书》的完成也伴随着博雷尔从教授职位退休,以及他的科学事业50年周年庆典,以1940年初他的数学手稿精选的出版为标志。他职业生涯的第二阶段就此结束,和第一阶段一样,欧洲爆发了战争。和第一次一样,那是一段充满激进活动的时期,但是涉及范围更为广阔,以至于他极度被公众所需。政治和社交活动对法国知识分子来说从不陌生,但是博雷尔却是牵扯最深的人。他活跃于由潘勒韦担当领袖之一的法国社会党,并在1924年左翼联盟得势的大选中被选为阿韦龙省的副省长。潘勒韦任命博雷尔担任海军部长,用的

是许多年前蒙日用过的同一间办公室。值得注意的是,1925 年法国的潜艇建造项目都是以科学家的名字命名:帕斯卡、巴斯德、庞加莱、彭赛列、菲涅耳、蒙日、阿基米德(Archimede)。

同年,博雷尔发行了他最著名的政治作品《共和政治》(*La politique républicaine*)。他已经是圣阿夫里克的市长和阿韦龙省的参议长。在之后的两届议会上,博雷尔作为圣阿夫里克的议员,运用自己可观的影响力支持各类对法国科学有益的项目。他和佩兰一起在促进措施落实中起了领导作用,以至于最终促成了国家科学研究中心的成立。他还主导了 1927 年筹建庞加莱研究所的协商和部署,而他的余生都主持着这个法国数学研究的中心。洛克菲勒基金会*捐助了所有花费,不久之后它还赞助了格丁根大学的数学研究所。当博雷尔成为公众人物后,对于数学家们来说他不再像先前那么容易接近,但是作为补偿,通常凭借他的地位和影响力,他得以在环境良好的办公室里演示数学和科学。

他人生的最后阶段,退休且高龄,因战败和焦虑而忧郁。博雷尔一直以来都是激昂的爱国主义者,他在 1941 年 10 月,以 70 岁高龄被德国当局逮捕,并与其他三位巴黎科学院成员被关押在弗雷讷,罪名是涉嫌从事破坏性活动。当时环境十分艰苦,而他的健康堪忧。在被释放以后,他回归研究工作并坚持不懈地创作,在退休后剩下的 15 年生命中,他出版了超过 50 份笔记、论文和书籍。在这段时间里,他投入了大量精力撰写适用于教育读者而非专业人士的数学和物理学读物。他是高水准的半通俗化大师。他最后的研究论文,除了一两篇之外,都是简要说明,他唯一苦心经营的是,1952 年他 81 岁时出版的《博雷尔全集》的倒数第二册,内容关于不可达数。他的许多作品受到有限论理念的影响,而这最后一本书体现了他实数必然“不可达”的信仰,因为在有

---

* 洛克菲勒基金会(Rockefeller Foundation)1913 年由约翰 · D · 洛克菲勒创立,1913 年在纽约注册。2000 年资产 33 亿美元。它是美国最早的私人基金会,也是世界上最有影响的少数基金会之一。——译者

限的表格里我们至多可命名可数子集。在接近尾声时他略显颓势，但是以高水平不间断地在大量领域里工作了如此长的时间本身就是一项无与伦比的成就。从第一次世界大战开始前至此，他的伟大成就作为经典数学的一部分会永存下去。

在他人生的末期，博雷尔是一位了不起的旅行家。他作为演讲者受到极大的欢迎，而且总是做好接受邀请的准备。除了走访欧洲各国外，他还出访了北美洲、南美洲、印度、波斯（现为伊朗）、埃及和法属勒旺岛、西印度群岛，并于1920年在潘勒韦的陪伴下在中国逗留了五个月。甚至到1955年夏天，84岁高龄的他还在巴西参加了一个国际统计学家聚会。在回程途中，他身体变得衰弱，再也没有完全恢复。他在1956年2月3日于巴黎逝世，享年85岁，并安葬在圣阿夫里克。

博雷尔的一生中接受了许多来自国外科学院、大学和学术团体的荣誉和称号。他在1921年成为巴黎科学院院士，并在1934年当选为院长。他被授予了法兰西共和国荣誉军团的最高荣誉大十字勋章，并任职于勋章委员会。他在第一次世界大战后被授予英勇十字勋章，在第二次世界大战后被授予法国自由抵抗奖章。他体型高大，举止庄严高贵。就像他曾教过的学生所说，随着现代数学的伟人之一博雷尔的去世，一种充满威严的人格就此消逝。

高木贞治（1875—1960）

迄今为止，除了一位美国人，我们所有的主角都是欧洲人，但是这里的主角却是完全来自世界的另一部分。现今我们知道日本数学家为数学界作出了重大的贡献。尽管传统数学在日本拥有一段漫长的历史，但是现代数学却姗姗来迟。在日本的众多数学家中，第一位闻名于世的是高木贞治（Teiji Takagi），类域论的创始人。

岐阜县位于日本中心的山区。高木贞治在1875年4月21日，明治天皇八年，出生于那个地区的农村粕屋町。他的母亲高木徒祢



(Tsune Takagi)嫁给了北方町一个镇上的地主木野村光藏(Mitsuzo Kinomura),但是她回到娘家生养孩子,并且再没有回到丈夫身边。据说是因为丈夫稻田地里的水蛭让她害怕。男孩的舅舅高木勘助(Kansuke Takagi)没有子嗣,他按照当时家里没有继承人的日本有钱人的惯例,收养了高木贞治作为儿子。至此他的姓变成了高木,不再是木野村。之后他说道,是因为那些水蛭才让他接受了良好的教育并成为一名数学家。

这个男孩身体虚弱,在养父的监管下将童年的大部分时间用于学习,很少和其他孩子一起玩耍。他是一名出色的学生,通过跳级用三年时间完成了镇上学校的六年教育,并在五年后以第一名的成绩从该省首府的岐阜中学毕业。1891—1894 年期间,他进入了古都京都的第三国立高中。在当时,日本的唯一一所大学在现在的首都东京。最初它叫“帝国大学”,但是之后京都建成了另一所大学,所以它更名为“东京帝国大学”,最终成为了“东京大学”,高木贞治在 1894 年入学,并在三年后毕业。尽管他学业出色,但是他的同学们觉得他有些沉默和不善社交。他们叫他“菩萨”,因为他习惯长时间地保持同一个姿势。

当时的数学系教授是藤泽利喜太郎(Rikitaro Fujisawa),他从伦敦大学学院毕业后去了斯特拉斯堡大学,然后到德国师从克里斯托费尔*和雷耶**。1886 年获得博士学位后,他去了柏林大学一年,在那里他深受克罗内克的影响,并将一些德国的研究思潮带回了日本。后来他日渐集中于行政工作,并且担任了参议员。藤泽利研讨班的主题是

---

* 克里斯托费尔(Elwin Bruno Christoffel,1829—1900),德国数学家及物理学家。——译者

** 雷耶(Karl Theodor Reye,1838—1919),德国数学家,主要研究几何学,特别是射影几何和综合几何。——译者

代数，但是高木贞治还研习了雅可比的椭圆函数论，并撰写了两本初级数学课本。

在帝国大学读了一年研究生以后，他被日本政府送到德国继续进修，首站是柏林大学。那时魏尔斯特拉斯、克罗内克和库默尔都已去世。他们的继承者中，施瓦茨（Hermann Schwarz）对高木贞治有些影响，但是全盛时期的弗罗贝尼乌斯给了他最深刻的影响。后来高木贞治回忆道：

富克斯和施瓦茨那时已经很老迈了，如果生活在现在的日本，他们会因为超过年龄限制而被勒令退休。弗罗贝尼乌斯是教授中最年轻的一位，负责伽罗瓦理论和数论的教学。尽管他上课的内容很普通，但是他的态度十分活泼，而且他的授课过程中没有笔记。我从来没有上过如此生动的课。但是说实话，我对弗罗贝尼乌斯有些敬畏。当时的情景如下：在我要出发去德国前，一些帝国大学理学院的年轻教授们刚从那个国家回来，我打听了他们对德国各方面的评价。有人对我说："如果你在弗罗贝尼乌斯的班级，你必须极度小心。"据他所说，当弗罗贝尼乌斯成为理学院院长时，他进行了就职演说，其中有一段历数了德国科学发展的辉煌过程："为了学习德国的科学，许多外国人来到这个国家，有美国人，后来甚至来了日本人。在未来，毋庸置疑地，甚至猩猩都会前来……"无论如何，我被警告必须带着必死的决心去参加弗罗贝尼乌斯的课程，因为他极度鄙视日本人。然而当我与他联系以后惊奇地发现，他并不是一位如此让人厌恶的人。

在希尔伯特和克莱因的全盛时期，高木贞治随即转去了格丁根大学。这让高木贞治意识到，他在东京大学所教的数学比起同时代德国学者所创立的数学相差甚远。在他的回忆录里他写道：

我对于格丁根大学和柏林大学数学系截然不同的气氛万分惊讶。

在前者,每周会举行一次会面,参与者是一群来自全世界的优秀年轻学者,就像这里是数学世界的中心。我当时已经25岁,却痛苦地感到我的知识要落后于那里的数学水平50年。要弥补这50年的落后似乎十分困难。但是用三个学期沉浸于格丁根大学的氛围后,我开始发觉几乎已经跟上了这些差距。就此我认识到,对于追求科学真理来说,氛围是多么的重要……

当时克莱因的课堂十分受欢迎。就德国大学的规则来说,学生只要付了学费就能加入该课程的学习。为了决定是否要定期听课,学生们可以免费试听六周的课程。然而,实话实说,我从来没有付过他课程的学费,我去上了六周后就结束了。那些已经很足够了。那六周的课程很好地帮助我补上了这50年的滞后。我想将这门课读完也很难有效完成这个目标。总之,克莱因总是用"三个A"这个有趣的表述作为这门课程的开场白:它们就是Arithmetic(算术),Algebra(代数)和Analysis(分析学)。我解读这晦涩的寓意为:"通常一个人学习数学,会将它分为数个领域,我却用自己的几何学将它统一起来。"因为这些建立在这统一精神之上的理念,我以强烈的兴趣参加了这六周的讲座。

高木贞治研习的著作之一是当时刚出版的希尔伯特的《代数数域理论报告》,而他决定将希尔伯特第十二问题作为自己的研究课题。后来他回忆这个决定:

当我就学习方面去咨询希尔伯特时,我觉得他以怀疑的眼神紧盯着我。他问我:"你说要学习代数数论。这是真的吗?"在当时,这个理论在格丁根大学几乎无人问津。所以无怪乎他会怀疑一个东方人想要涉足这个理论。我回答:"我想要这么做。""那么什么可以用来定义代数函数?"他立刻问道。我一时回答不出。"它是由黎曼曲面定义的。"教授自己回答了这个问题。答案当然是正确的,我回答道:"哦,对,就是这样!"估计他就此认定我的数学能力不太可靠。然后他让我陪他

走一段，因为他到了下班的时间。我告诉他想要研究希尔伯特第十二问题，其基域是高斯场，例如，我正要研究双纽线函数的复乘。他对我说："哦！这很好"，他停在了威廉－韦伯大街的交汇口，在地上画了两个图形，一个正方形和一个圆形，是我们在施瓦茨的研究中发现的与双纽线函数有关的图形，他说："你做过施瓦茨的学生，你当然知道这些。"我至今还记着那个地点。

高木贞治成功将他的研究成果写进了他的论文《论阿贝尔域在有理复数域的推广》(On the Abelian fields over the field of rational complex numbers)。这是他在日本提交的理学博士论文，并在1903年被采纳。1900年，高木贞治已经被聘请为帝国大学的副教授，尽管他在次年才离开格丁根大学。就如一位刚归国的人士一样，高木贞治会穿着优质的潮流服饰，戴着夹鼻眼镜，还蓄了像德皇威廉二世一样的胡子。邻居偷偷地称呼他为"那幢房子里住的贵公子"。

他借住的房子的房东名叫水岛哲也(Tetsuya Mizushima)，是东京商业高校的一位教授。他的妻子美津(Mitsu)觉得自己的妹妹藤志(Toshi)，一位开朗善于社交的女性，会和沉默寡言的高木贞治凑成很合适的一对。他的双亲同意了这桩婚事，他们在1902年4月结婚。高木贞治夫妇有八个孩子，三子五女。他们的一个儿子后来成为了帝国大学的物理学教授。

1903年，高木贞治被提升为正教授。尽管他是位非常成功的老师，拥有许多学生，但在1903—1914年之间他没有发表任何东西。"一般来说我是没有刺激便一事无成的人，"他解释说，"与现在的氛围不同，当时的日本几乎没有人在研究和我相同的专业，所以我无法得到来自他人的激励。"然而，当时时值第一次世界大战，欧洲与日本的学术交流被打断，那时高木贞治创立了之后被称为类域论的理论，并证明了希尔伯特第十二问题的正确性。后来他回忆道："由于这个结果相当出乎意料，我觉得这必然是错误的。所以我查找错误的地方。也许我

那时有些神经紧张。我经常做与研究相关的梦。在一个梦中,我深信自己解决了问题,然后我醒了,我在书桌前解出了问题,然后叹息着发现出了错误。我寻找反例也无果。我用了很长的时间来寻找错误。甚至在我建立了该理论以后我仍然对自己的结论不抱信心。"

1920 年,高木贞治在其重要研究报告《相对阿贝尔数域理论》(On the theory of relatively Abelian number fields)里发表了他的结论。他在于斯特拉斯堡举行的战后首届国际数学家大会上用法语做了一个汇报:"代数数论中的一些一般定理"(On some general theorems in the theory of algebraic numbers)。里面包含了他的理论中所有的重要结论,而他也探讨了将理论扩展到一般伽罗瓦域的可能性。直至今日这一点仍未实现。

由于代数数论当时在德国之外并未被很好地研究,而且在法国的施压下,德国被斯特拉斯堡召开的国际数学家大会排除在外,高木贞治的成果没有得到该有的认可。但是他的研究吸引了年轻的阿廷(Emil Artin)的注意力,并将这个理论发扬光大。1922 年,高木贞治发表了论文《论任意代数数域的互反律》(On the law of reciprocity for arbitrary algebraic number fields),阿廷将之发展成了一般互反律,使高木贞治的类域论更为精确。阿廷的结论一在《汉堡论文集》(*Hamburg Abhandlungen*)上发表,高木贞治就向其表达了极大的赞誉。同时,德国数学学会请哈塞(Helmut Hasse)在 1925 年的年度大会上给出一个关于类域论的汇报。第二年这份汇报出了一个大纲,第三年出了一份包含证明的更具体的说明。哈塞所著的《类域论报告》(*Klassenkörperbericht*)对高木贞治 - 阿廷类域论在国际数学圈内的推广作出了很大的贡献。

至此高木贞治已经功成名就。1925 年,他被选为帝国学士院院士。1929 年,他获得了奥斯陆大学的荣誉学位。1932 年,他与希尔伯特和阿达马一起,作为副主席参加了在苏黎世举行的国际数学家大会。他举行了一场晚宴,宴请了所有对类域论的发展作出贡献的数学家。

1939 年,第二次世界大战在欧洲爆发,日本在 1941 年末加入了战

争。同年，日本政府注意到国际上给予他的尊重与荣誉，授予他珍贵的文化勋章。在被授予勋章后，他引用之前回忆录里的段落发表了感言。1936 年，他以法定退休年龄 60 岁从大学退休，并成为了荣誉教授。

1943 年战争末期，高木贞治和家人自 1902 起所住的邻近大学的房子在一次美军空袭时被烧毁。高木贞治本人不得不回到原来岐阜县的村里，但在两年后他回到东京和大儿子一家一起生活。1952 年，他的妻子藤志死于肺癌，他本人于 1960 年 2 月 28 日死于中风，享年 84 岁。上千人出席了他的葬礼。他的作品集于 1974 年被出版。

早年高木贞治撰写了数本关于代数、分析学、数论和 19 世纪数学史的教科书。这些书撰写于他在帝国大学的漫长教师生涯中，并且对日本历代数学家的教育都有着重大的影响。此外，为了拓宽读者群，激励日本公众特别是年轻人对数学的兴趣，他还写了一些大众读物。他对日本未来数学研究所持的观点意义深远。

第八章

从哈代到莱夫谢茨

我们接下来要讲述的6位数学名家生于1877—1884年的8年间。其中2位来自美国,另外4位分别来自英国、德国、荷兰和俄罗斯。

哈代(1877—1947)

现在让我们回到大英帝国。总体来说,戈弗雷·哈罗德·哈代(Godfrey Harold Hardy)是20世纪上半叶英格兰最为纯粹的数学家。他身为道德的典范,严于律己。他描述数学的方式鲜少有人能及,同时他还是一位英语语言大师。隐藏在一些讨人喜爱的怪癖之下的他极为感性。

哈代于1877年2月7日出生于萨里郡吉尔福德旁的克兰利小镇上。他还有一个妹妹叫作格特鲁德(Gertrude)。他的父母艾萨克(Isaac)和索菲娅(Sophia)都没有上过大学,但是都对知识和文化有很好的品味。哈代的父亲在克兰利中学教授地理和绘画,同时他还教授声乐课,编辑校刊,参加足球队。他被描述为一个温和、宽容但多少有些一无所长的人。哈代的母亲则恰恰相反,她在学校教授钢琴课,并且



在学校的学生宿舍帮忙。据称她着迷于参与孩子们的福利和教育事业。

哈代从小就展示了在数学方面的特殊才能和兴趣。当他被带去教堂时,他以因式分解赞美诗中的数来打发时间。他没有参加常规的数学课,而由家庭教师辅导。当他仅仅13岁时,就已经读到了克兰利中学的最高年级,并在班中排名第二。他随后赢得了最好的寄宿学校之一温切斯特学院的奖学金,并且在那里不开心地度过了6年,直到1896年以奖学金获得者的身份去了剑桥大学三一学院。他一直对温切斯特学院没有给他机会参加学校板球队耿耿于怀。

哈代选择剑桥大学,特别是三一学院,是由于它的数学传统,但是对于一个想要以研究为职业的人来说,相比起巴黎大学和柏林大学,剑桥大学的机会要少得多,特别是它的考试机制急需改良。私人教师为了剑桥大学的评议会考试而训练学生,这种考试会在4天里面给出8页纸的问题。哈代极度不喜欢这种考试,因为比起测试学生的学习能力和洞察力,这更像是在测试学生的耐心和记忆公式及方程的能力。他认真思考后认为剑桥大学荣誉学位考试只是彻底的浪费时间,并尝试着从数学系换到历史系。然而,诚如他在回忆录《一个数学家的自白》(*A Mathematician's Apology*)中所写:

我首次对数学产生兴趣是由于勒夫(Love)教授,他给我上了几个学期的课,并给予了我第一个严肃的分析学概念。但我真正需要感激他的地方在于——毕竟他主要还是一位应用数学家——他建议我阅读了若尔当的《分析学教程》。我永远不会忘记在阅读那份伟大作品时

的震撼，对我这一代的大多数数学家来说这是一种启蒙，当我拜读它时第一次体会到数学的真正意义。自那以后，我怀揣着坚定的数学志向和对数学彻底的热情踏上了真正的数学家之路。

于是若尔当的书让哈代留在了数学界，尽管他极度厌恶剑桥大学的荣誉学位考试，但他仍将正统数学置于一旁，花了两年的时间为此精心准备。哈代在1898年荣誉学位考试的第一部分成绩排名第四，并且在两年后参加第二部分考试时成绩位列第一等。1901年毕业时他在三一学院获得了优等生奖学金；次年他赢得了令人垂涎的史密斯奖。此时英国数学家对获得博士学位还并不以为然。

作为一名研究员，哈代得以将极大的热情投注于纯粹数学当中。接下来的10年里他创作了数篇论文，使他以分析学家的身份获得了声望，他还撰写了经典的教科书《纯粹数学教程》(*A Course of Pure Mathematics*)。该书在1908年首次出版，以严谨的语言阐述了一系列实变量分析的基本概念。在此之前，英国的教科书和老师仅仅会提供方程和列举一些范例及应用，几个世纪以来极少受到欧洲大陆进步学说的影响。哈代的书在风格和内容上都与《分析学教程》多少有些不同，比如说它包含了更多具有挑战性的练习题。它被再版了10次，并且始终被英国大学甚至高中作为标准教科书使用，直至第二次世界大战结束。同时，哈代和其他有着相同信念的同僚尝试着手对数学荣誉学位考试的改革，成功将其中最糟糕的部分免除。在他的研究员身份结束之际，他成为了大学讲师，职责是每周讲6堂课。

同样在1908年，哈代以给美国《科学》(*Science*)杂志写信的形式，独自对应用数学的发展做出了贡献。当时孟德尔遗传学*是一项备受争议的课题，一篇刚在《英国皇家医学会通报》(*Proceedings of the Royal*

* 孟德尔遗传学又称经典遗传学，是孟德尔(G. J. Mendel，1822—1884)根据豌豆杂交实验的结果提出的理论，其中最基本的定律有分离定律和独立分配定律。——译者

Society of Medicine）中出现的文章对孟德尔的一些遗传理论进行了驳斥。哈代在信中使用简单的代数法则论证了文章里有一个错误，并建立了一个预测遗传体系的方程。同年，德国物理学家魏因贝格（Wilhelm Weinberg）也推导出了一个类似的预测方法，为了纪念两人的这个原理，它被命名为哈代－魏因贝格定律。这条定律在现今作为人口遗传学的一条基本原理，被广泛运用于血型和稀有疾病的基因传递研究。

1910 年哈代当选为伦敦皇家学会的会员。尽管许多人认为 1900 年到 1910 年是他的高产阶段，他本人则认为在这 10 年间没有出版太多有实际价值的作品，并在《一个数学家的自白》中写道："我在接下来的 10 年里撰写了大量作品，但是鲜少是重要的；我能记起的稍许令人满意的文章不超过四五篇。"他认为他的最佳成果来自于后期，出自他与李特尔伍德（Littlewood）和拉马努金（Ramanujan）的合作，后者是本书下一章的一位主角。

哈代从 1911 年开始和比他小 8 岁的李特尔伍德合作。这段持续了超过 35 年的合作关系成就了上百篇论文的发表，就像斯诺* 在为《一个数学家的自白》所撰写的序言里所描述的，"这是数学史上最著名的一段合作，在任何学科或者任何其他创造性领域都没有什么可以与之匹敌。"两人主要通过书信一起工作，即使当他们在同一所学院时也一样。在他们最多产的合作阶段即 1920 年至 1931 年间，他们甚至没有在同一所大学。在各种大小型会议上，总是由哈代来呈现他们共同的作品。实际上李特尔伍德鲜少参与这些场合，以至于数学家们曾经私下打趣怀疑李特尔伍德是否真实存在，或只是哈代的一个臆想。

同时哈代越来越不满于在剑桥大学的生活，而这大部分原因来自于第一次世界大战引起的争论。李特尔伍德因为服兵役而离开了。哈代在剑桥大学的前几年曾参与了几个社团，包括著名的精选论文俱乐

---

* 查尔斯·珀西·斯诺（Charles Percy Snow，1905—1980），英国科学家、小说家。——译者

部使徒社。该俱乐部每周聚会探讨和辩论哲学问题，多年来它的成员中出现了许多杰出人才。通过这种方式，哈代建立了几段深厚的友谊。其中有一段是与著名的哲学家、数学家和和平主义者罗素。哈代对于罗素因为反对战争而被学院取消讲师资格感到不可置信。多年后他就此事写过一本小册子。

在西尔维斯特过世后，牛津大学的下一位萨维尔几何学教授是他的副手埃森（William Esson），但当1919年这个职位再次空缺时，哈代趁此机会离开了剑桥大学，他在那里被越来越多的行政工作占据，影响了他的研究。在牛津大学，他到达了职业生涯的巅峰，创建了一个蒸蒸日上的研究学派，并且与仍留在剑桥大学的李特尔伍德进入了最佳合作时段。在牛津大学"数学是最传统的科目之一，但是它可能没有像在其他大学里那么引人注目"，他写道，"数学和物理学不仅仅被文学院，甚至被其他学科所掩盖。"哈代的非传统观点在牛津大学新学院得到了赏识，而他也自动成为了其中的一员。在社交场合，哈代是一位在许多话题上都能高谈阔论的健谈者。他常常喜欢卖弄谈话技巧，而有时人们并不能轻易理解他真实的意图。他是个非常敏感和自律的人，他喜欢以一种温和而古怪的教授形象来隐藏内心深处的严肃。他从不佩戴手表或使用电话，他主要通过电报或明信片来通信。

他本性中更为严谨的一面，体现在第一次世界大战后他为推进与德国数学家的和解，以及之后帮助纳粹统治下的欧洲知识分子难民所作的努力。在英国，尽管许多救助活动都是个人行为，其中包括哈代本人，但以此为目的名为学者援助委员会的组织在1933年成立。这个团体募集钱款，用以维系各国流离失所的大学学者，并且作为一个信息中心，使他们可以和能提供最大帮助的机构取得联系。政府对此表示支持，认为它为了公众利益致力于"尝试（为大英帝国）保护那些受到德国驱逐，并在纯粹数学、应用数学……音乐或艺术方面表现杰出的犹太人"。哈代作为一位经常被征询意见的数学家代表，认为这是一个强化英国数学的机遇，特别是在牛津大学和剑桥大学。在第一年末，4位

失去家园的数学家在英国定居，随后又有 7 位数学家来到英国。哈代花了大量的时间和精力在这一辛苦的工作上。

哈代在与人共事上有着与生俱来的天赋，除了李特尔伍德和拉马努金之外，他还和许多其他当时一流的数学家合作过。他还在 1928—1929 年间作为访问教授去了普林斯顿大学和加州理工学院，作为交换，维布伦(Veblen)到了牛津大学顶替他的位置。1931 年哈代作为塞得林纯粹数学教授* 回到剑桥大学，并再次受邀成为三一学院的研究员。他做出此举的原因之一是，有朝一日在到达强制退休年龄后，他可以继续住在学院里，而这在牛津大学是需要特批的。然而作为新学院的荣誉研究员，他得以与牛津大学维持联系，并时常在那里度过周末和假期。

伦敦数学学会也在哈代的人生中占有一席之地。从 1905 年到 1908 年，以及从 1914 年开始直到 1945 年最终退休，他都在学会里担任职务。1917 年到 1945 年间，他担任学会的秘书，以及两任主席，并且从未缺席任何一次会议。仅以他任职学会的一事为例，1924 年当需要为创立已久的《学会通报》(*Proceedings*)建立副刊(*Journal*)一事刚浮出水面，我们发现他已经在与洛克菲勒国际教育委员会联系寻求赞助了。"当时数学家们所要面对的所有困难中，最大的困难也许就是出版问题。这个问题在各地都很严峻，但是在英国和美国可能尤为特殊，因为只有在那些地方，主要的数学刊物是由社团发行的。"赞助马上就谈妥了，而《副刊》也在两年后发行。

在哈代的有生之年，他一直将所作的书的部分版税捐给学会，而当他去世后，人们发现他除了将部分财产用于为妹妹格特鲁德建立一个终身权益之外，剩下的资产都留给了学会。在格特鲁德去世后，部分遗产被用于成立一项哈代访问学者项目，包括资助在英国数所大学的巡回讲学，又在新学院建立了资助年轻学者的哈代年轻学者奖学金。尽管哈代不经常旅行，但是他数次出访美国，并在那里结识了很多朋友。

---

* 19 世纪中期设立的一个教授职位的全名。——译者

他的某次出访,成功地让洛克菲勒基金会对在牛津大学建立一个数学研究所产生了兴趣,就像他们在格丁根大学和巴黎大学所做的一样。可惜的是,哈代缺少柯朗和博雷尔的政治手腕和毅力,因此直到很久之后此事才有进展。

在数学领域里,哈代主要侧重于分析学,特别是解析数论。他带的博士生大部分都在两次世界大战中成为分析学家。哈代-李特尔伍德学派在英国占据了绝对的主导地位,因此欧洲大陆的数学进展,例如现代抽象代数学在英国都被忽略了。除了数学之外,哈代的主要热情都放在了板球上,他喜爱观看和评论板球比赛,有时还会下场参与,例如在新学院学者与唱诗班团队的年度大赛中他曾担任队长一职。他写了大量的数学文章,一些是独自完成的,一些与他人合作,其中有些书被列为经典,当然他也写了一些非专业领域的书籍,《一个数学家的自白》就是其中最著名的一本。

他的一位好友波利亚曾说过:"哈代有一种特殊的人格魅力。我无法具体描述这种魅力,但是每个人都会被他吸引,无论男女,无论是不是数学家,也无论是知识分子还是极其普通的人。"事实上他非常淘气,这也许是他吸引人的部分特质,但也有些人认为他有些过头。比如说,他会假装认为上帝是他的个人宿敌。又比如说,有一次出海时,他写了一张明信片预备寄给他的一位朋友,里面写道:"刚证明了黎曼假设。"他想着万一回不来,人们会发现这张明信片,而哈代将会作为证明这个假设(方法未知)之人被记入史册。鉴于上帝不愿让他获得这项死后殊荣,便会确保他安全返回,这张明信片便在无人得知的情况下被销毁了。

哈代终身未娶,他曾被怀疑与年轻男子有所暧昧。他对至爱的妹妹非常感恩,她在数学方面也极有天赋。1939 年哈代患上了冠状动脉血栓,这也使他的运动生涯画上了句号,比如说他非常喜爱的板球和室内网球。1947 年 12 月 1 日,哈代在他 70 岁时逝世,当时他正听着妹妹给他朗读一本关于剑桥板球历史的书。哈代获得了许多荣誉,包括伦

敦数学学会颁发的德摩根奖章，伦敦皇家学会颁发的一枚皇家奖章，然后是西尔维斯特奖章，最终因其去世获得了科普利奖章。李特尔伍德比他多活了30年。

哈代在他的祖国有很高的知名度，他在海外也享有更多的认可，特别是在德国。希尔伯特认为他是英国最好的数学家，特别是他和李特尔伍德合作的时期。哈代本人性格谦卑，形容李特尔伍德是他所认识的最好的数学家。他说没有其他人可以将洞察力、技巧和能力结合得如此之好。让人吃惊的是，到现在还没有一份完整的哈代传记。那些想要知道他的奇闻轶事的人可以选择去读一下他在1940年所写的《一个数学家的自白》。这本珍贵的书至今仍在再版，并且被翻译成多国文字。最近的几个版本包括了斯诺在哈代过世后写的序言，但是就某些意义上来说，斯诺所写的趣事虽然具有娱乐性，但却缺乏真实性。《一个数学家的自白》中写道：

我从未做过任何"有用"的事。我的发现未曾，也不太可能为世界增添哪怕一丁点的便利，不论是直接或间接的，也不论是好是歹。我也帮助训练了其他数学家，但是那些与我同类型的数学家们，不管我在何种程度上曾给予过帮助，都与我一样没有用处。以所有的实用标准来衡量的话，我的数学生涯的价值就是零……我人生的情况，或者说任何一个拥有和我一样感觉的数学家的人生情况就是：我为知识领域添砖加瓦，也帮助他人添枝加叶；而这些东西的价值，与那些伟大数学家所创造的价值，或其他无论显赫与否的艺术家所留下作品的价值相比，仅仅是程度上有所不同，性质上并无差异。

维布伦(1880—1960)

人们一直试图在格丁根大学与普林斯顿大学之间做比较。当纳粹得势时，德国所遭遇的损失，很大程度上来说是美国的收益，而普林斯

顿大学收获颇丰。为了明白其中缘由，让我们花些时间来了解一下世纪之交时这所学校的历史。就像克莱因在成就格丁根大学的声誉上所起到的领导作用一样，在普林斯顿大学，这个人就是奥斯瓦尔德·维布伦(Oswald Veblen)。而且这两位在各自的国家也都拥有强大的影响力。尽管两位都是受人尊敬的研究者，但他们并不是在研究领域里突出于同辈，而是在其他方面做出了重要贡献。如果将克莱因称为数学政客，那么维布伦可能更应该被称为数学政治家。



19 世纪的最后 25 年里，人们见证了美国数学研究层面的整合。新的学校诸如霍普金斯大学、克拉克大学和芝加哥大学将学术研究和培养学者视作明确任务。然而较为古老的大学，例如普林斯顿大学也不落人后。在 1896 年成为普林斯顿大学前，它仅仅是新泽西学院。与哈佛大学和耶鲁大学的前身一样，它的前身是一家师范学院，并很少在科学研究领域作出杰出的贡献。然而仅仅 40 年后，普林斯顿大学就成为了数学研究和高等教育的一个世界中心。

学院在此方面所踏出的第一步，就是决定扩建研究生院并组成一所大学。在威尔逊(Woodrow Wilson)的带领下，大学实现了各种转型。比起作为美国总统，他作为大学校长要更为成功。最为重要的转型之一就是建立了导师制，这使得课堂变小，而教学也更个性化了。在物理学和自然科学的教学方面，这项任务被委托给了数学家范因(Henry Burchard Fine)，由他担任理学院的院长。范因从得克萨斯大学毕业以后，曾经去欧洲学习，首先在 1884 年 5 月师从克莱因，接着在 1891 年夏天于柏林大学师从克罗内克。范因是导师制的坚定拥护者，并认识到这是一个很好的机会，能为强化数学系带来契机。他在普林斯顿大学的发展历程中担当了至关重要的角色。

维布伦1880年6月24日出生于艾奥瓦州迪科拉市的一个小村里，他是8个孩子（四男四女）中的长子。他的挪威先祖在大约19世纪中叶作为拓荒者来到美国西部定居。在奥斯瓦尔德·维布伦刚出生时，他的父亲安德鲁·维布伦（Andrew Veblen）在迪科拉的一所路德学院教数学和英语，但是不久之后他就去了霍普金斯大学，用了两年时间攻读研究生，随后他们举家迁往艾奥瓦市，而他开始在艾奥瓦州立大学教授数学和物理。在那里，他的儿子奥斯瓦尔德于1898年获得第一个本科学位，作为一名物理学助教工作了一年以后，他去了哈佛大学，并且在1900年得到了第二个文学学士学位。

在美国可以接受良好的数学研究生课程才仅仅开始了10年，之前都是将年轻有为的美国人送去欧洲（特别是德国）接受高等数学教育。维布伦选择了芝加哥大学，他的叔叔索尔斯坦（Thorstein），著名的经济学家和社会评论家，在那里任教。当时在芝加哥大学的学生还有伯克霍夫、莱纳（N. J. Lennes）和R·L·穆尔。在上数学课程的同时，维布伦也参加了杜威*的哲学课程。1903年在E·H·穆尔指导下以一篇几何基础为主题的论文获得博士学位之后，他继续在芝加哥大学作为数学副教授逗留了两年，之后他以导师的身份加入了普林斯顿大学的教育团队。1907年他的第一本书面世，即与莱纳合写的《微积分概论：一元实变函数》（*Introduction to Infinitesimal Analysis: Functions of One Real Variable*）；次年，维布伦就被聘为普林斯顿大学正教授，尽管他只有20多岁。

范因院长计划通过陆续委任有前途的年轻数学家来建立一支强大的数学研究团队。维布伦是第一位，与他一起的还有拓扑学家伯克霍夫、分析学家布利斯（G. A. Bliss）、微分几何学家艾森哈特（Luther Eisenhart）和代数学家韦德伯恩（Joseph Wedderburn）。在范因院长和他们

---

* 约翰·杜威（John Dewey，1859—1952），美国早期机能主义心理学的重要代表，著名的实用主义哲学家、教育家和心理学家。——译者

的共同努力下，研究氛围日益浓厚。几年后，布利斯离开去了芝加哥大学，而伯克霍夫去了哈佛大学。同时，维布伦的几位前普林斯顿大学的博士生被委任为教员，包括拓扑学家亚历山大(J. W. Alexander)和数理逻辑学家丘奇(Alonzo Church)。1924 年，代数几何学家莱夫谢茨从北美大草原被征召而来，并很快承担了重要角色。美国版《数学纪事》(*Annals of Mathematics*)在 1911 年迁到了普林斯顿大学，最初由韦德伯恩和莱夫谢茨担任主编，并迅速成为了世界级的研究期刊。

在 20 世纪 20 年代，正如我们所知，芝加哥大学已不如往昔。建造埃克哈特大楼作为其数学教学楼是复苏的第一个迹象。一直与母校关系密切的维布伦，对新大楼的建造颇为关心，他试着劝说范因院长，认为普林斯顿大学也需要建立至少相同规格的设施。在此之前，据莱夫谢茨表示，大家都在家里办公。琼斯(Thomas Jones)是范因的老朋友，同时也是老同学，他家境富裕，他与他的兄弟戴维(David)和侄女格瑟琳(Gwethalyn)向普林斯顿大学捐献了很多钱款。在 1928 年范因早逝后，他们捐献了更多款项用以修建和维护数学大楼，为纪念范因，这幢大楼以其名字命名，它是一幢“任何数学家都不愿离开”的建筑。维布伦负责此项目，并建成了范因大楼，这座大楼也成为大学建筑中一个异常高的标准。

维布伦将其精心策划为一个“可以让有相似研究兴趣的人们聚在一起相互鼓励和支持，也可以让新老教员进行轻松交流”的中心。为保持与物理学家有良好交流，他在校园中选择了与物理实验室相邻的区域，以一条走廊将新建筑与之相连。此时，维布伦刚以 1928—1929 年访问教授的身份从牛津大学回来。建筑的外观他选择了红砖与石灰岩的“牛津大学样式”。内部装修方面，他与纽约的一家高品质装修公司紧密合作。教员们拥有的是“书房”，而非“办公室”；有些是奢侈的配有壁炉的大房间，内部装饰着雕花橡木镶板、真皮沙发、手织东方式地毯，以及暗藏的黑板和带铅条的窗户。这幢楼里有着一流的图书馆、公共休息室和其他设施。

1930 年普林斯顿高等研究院的建立为维布伦提供了新的挑战。班伯格家族和富尔德家族为即将坐落于新泽西州及附近的研究院提供初始资金。因为考虑到这里的田园氛围有助于纯学术的钻研,并且因为大学里有一个很好的研究专用图书馆,普林斯顿被选为了研究院所在地。数学学院的建立成为了研究院的第一个任务。维布伦是第一位被任命的教员,并且负责选择数学学院的其他成员。首先亚历山大、冯·诺伊曼(von Neumann)、爱因斯坦和外尔被委任,两年后莫尔斯(Marston Morse)也加入了这个团队。研究院每年会有几位访问学者,他们被称作研究员,还有几位助理研究员,被称为常任成员,但那 6 位在最初的 10 年成为了数学学院的固定班底。维布伦,主要参与制定了注重博士后工作的学院政策,而他对此的观点是依照大学里的经验形成的。拥有学者身份的同时,他在学院成立初期还是该基金的托管人,在安排购买大楼土地事宜上起着重要的作用。到 1939 年一切准备就绪,学院的教员使用起了大学设施,数学家们在范因大楼有了办公室。

同时,维布伦也是一位出色的谈判家、募资人和组织者。1919 年他入选国家科学院,而这也将他带入了那个驻扎在华盛顿、充满权利和野心的科学家圈子。1923 年他成功劝说洛克菲勒基金会和国家研究委员会将数学也纳入了他们的博士后奖学金项目。这些奖学金用于给年轻的科学家提供赞助,并让他们能够全身心地投入研究中。维布伦还活跃于美国数学学会的关键时期,并为数学研究集资。

1932 年维布伦到德国做了一次巡回演讲,期间他访问了格丁根大学、柏林大学和汉堡大学。在之后的纳粹当道时期,他帮助了大量流离失所的欧洲数学家来到美国安家。国际社会做出了快速回应,但是有太多的大学教师受到波及,再加之当时经济大萧条,而处理大范围的失业人员已是当务之急,为大量移民找到工作十分困难,而他们中不是所有人都能轻易被聘用的。然而美国的大学意识到这是聘用到全球最好科学家的一个机会,并且充分利用了这次机会。英国和其他欧洲国家也同样做了小规模的举措,但是他们仅仅成为了想要先逃离纳粹继而

去美国的人们的中转站。纽约的洛克菲勒筹资的国际教委会运行一项奖学金已有数年,用以资助欧洲学者去其他欧洲和美国的(学术)中心访问。现在洛克菲勒基金会和其他慈善机构转为致力于帮助那些失去工作的人移民美国。

之后我们会列举几个在纳粹早期离开的难民,在一切变得艰难之前移居美国并开始新生活的例子。维布伦与英国的哈代、法国的阿达马、荷兰的弗赖登塔尔(Freudenthal)及一些其他人合作,用他丰富的经验和说服力帮助那些试着逃离纳粹统治的绝望的人们。在这方面,如我们所见,维布伦受到了哈佛大学的伯克霍夫的反对,他认为这些移民占据了过多的让有能力的年轻美国人进入学术界的机会。

维布伦经常被委任参与处理那些潜在的困境,但是因为他内敛的性格,人们不太容易看出他参与了哪些事件。有一件他确切参与其中的事例是,20 世纪 30 年代末期,他在处理对数学研究出版物的审查这一重大问题上起到了重要作用。从 19 世纪晚期开始,这件事情由柏林科学院出版的《数学进展年鉴》(*Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*)执行,但对那些重要论文的评论却一直都不够恰当和及时。1931 年,施普林格出版社创办了《数学文摘》(*Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete*),由欧洲和美国杰出的数学家们组成编辑委员会。由格丁根大学的诺伊格鲍尔*担任主笔,新的评论期刊迅速获得了高效的美名。然而在比伯巴赫带领下的《数学进展年鉴》的编辑们开始受到意识形态上的干扰,到了 1937 年已经波及了《数学文摘》。比如说苏维埃评论家们的文章被禁止发表,犹太人的文章亦是如此。在那时,转去哥本哈根大学的诺伊格鲍尔辞去了主编职务,编委会的一干成员也辞去了职务,因此《数学文摘》的地位被大大削弱。同时美国数学学会正在考虑成立一个自己的评论刊物。施普林格出版社的一位

* 奥托·诺伊格鲍尔(Otto Neugebauer,1899—1990),20 世纪杰出的古代数学史家和数学文献索引编纂家。——译者

代理人代表学会与维布伦见面。经多方讨论，决定在美国成立《数学评论》(*Mathematical Reviews*)杂志，而在德国，《数学文摘》努力尝试度过战争年代。

在第一次世界大战期间，维布伦是一位上尉，在晋升为少校后，他负责管理马里兰州阿伯丁试验场的靶场射击和导弹研究。在美国加入第二次世界大战后，他回到那里从事导弹工作，他大力征召了其他数学家们来处理一些紧迫的问题，比如据报道是由他主导让冯·诺伊曼加入了对冲击波的研究。1943年，在建造最早的电子计算机的提议中，他给予了最衷心和决定性的支持，他还在之后高等研究院的冯·诺伊曼电子计算机的建造中起到了相同的作用。战后，国际数学活动以1950年在马萨诸塞州剑桥举行的国际数学家大会为标志正式恢复，维布伦是该届大会的主席。同年他成为了高等研究院的荣誉退休教授，但他仍致力于数学的发展。他获得了奥斯陆大学、牛津大学、汉堡大学、芝加哥大学、普林斯顿大学、爱丁堡大学和格拉斯哥大学的荣誉学位，并且是许多科学院的荣誉成员。

要对这位"老派自由人士"的所有活动进行详细说明的话，就像他的自述一样，在这里要占用的篇幅实在过大。维布伦于1960年8月10日在缅因州布鲁克林的家里过世，享年80岁。他在1908年与来自约克郡的伊丽莎白·理查森(Elizabeth Richardson)成婚，终身未生育。维布伦一家是户外运动的爱好者，经常与朋友们在普林斯顿的郊外散步。1957年，他们将自己靠近普林斯顿的81英亩(约合327 800平方米)土地捐赠，用于"建造一个公共植物园(现以赫伦汤植物园为名)，并希望这片园林能让人们远离汽车，单纯地走走坐坐"。在这时，维布伦仍然从事一些顾问工作，却遭遇了一起事故使他的视力严重受损，但是这起事故并没有对他友善的灵魂留下任何负面影响。

在数学方面，维布伦主要是一位几何学家。如我们所知，他早期的兴趣在基础原理，从希尔伯特的公理化方法所衍生，并且自此他发展出了他的第二研究方向——逻辑学。维布伦对射影几何学特别感兴趣，

而这形成了两卷经典的《射影几何学》(*Projective Geometry*),第一卷于1910年问世,第二卷于1918年发行。他在与普林斯顿大学的同事杨(John Wesley Young)合作撰写的第一卷的前言里写道:

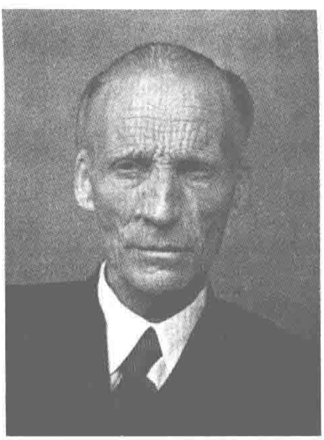
由于版面有限,为这些基础原理所写的本书可能对一些数学家来说是教育观点上的一种倒退。对此我们仅能回应,依我们看来,如果对基础原理不加重视的话,那么相当多的几何学知识无法被很好地吸收。我们相信,抽象法在射影几何学里是必不可少的,因为人们是通过后者将更高层次的几何学融会贯通的。一提到几何学,人们总是会想到欧几里得、笛卡儿、罗巴切夫斯基(Lobatchewski)等,射影几何学是由以上几位数学家中的一位发展确立的,那么将射影几何学的基本原理作为所有几何学的基础原理也就理所当然了。

之后维布伦的注意力转向了微分几何,这也使得另一本书面世,著名的剑桥数学大全将此书命名为《微分几何基础》(*The foundations of Differential Geometry*),这本书是维布伦与当时师从他的怀特海(J. H. C. Whitehead)合著的。在这本著作里,我们发现了以现代方式定义的微分流形,以及纤维丛概念的雏形。随后他致力于研究路线几何学(现今被作为仿射联络)和他所称的射影相对论。

尽管维布伦主要是一位几何学家,他的次要兴趣主要在拓扑学。他活跃于拓扑研究的时间相对较短,少于20年。他在芝加哥大学时,首次发表了若尔当曲线定理的严格证明,自此他开始了拓扑学研究。在转去普林斯顿大学以后,他开始痴迷于组合拓扑学,并发表了数篇论文,有一些是与他的弟子亚历山大合著的。1916年他在纽黑文市举办的美国数学学会研讨会上作了同调论及基本群的报告,该理论随后确立。这些讲座随后结集出现在他1922年的名著《拓扑学》(*Analysis Situs*)中,这也是第一本出版的关于组合拓扑学的教科书。然而尽管他仍然对拓扑学充满兴趣,之后却没有在这个学科发表过任何研究成果。

布劳威尔（1881—1966）

荷兰，以它的面积来说并不大，却惊人地出现了大量一流数学家。在20世纪，他们中最著名的是鲁伊兹·埃赫贝特斯·扬·布劳威尔（Luitzen Egbertus Jan Brouwer）。他在数学基础方面的研究有大量的记载，而他其他方面的数学研究则记录较少，虽然这些并不具有需要载入史册的重要性；而他的神秘主义理念，除了在极小的圈子里传播，并没有被大家当真。最近的传记研究令人们对这位杰出人士的生活有了新的认知，他已经有了太多的成就，也许还有更多他懒得费时费力去争辩的成就。



布劳威尔在家被叫作贝尔特斯（Bertus），于1881年2月27日出生于奥弗希（现在属于鹿特丹地区）的一个小镇上。他的双亲鲁伊兹（Egbertus Luitzen）和亨德莉卡[Hendrika，娘家姓保茨马（Poutsma）]都是弗里斯兰人。他的父亲是专业教师，之后成为哈勒姆一文理中学的校长。在那之前，他们全家从奥弗希搬到了梅登布利克镇，在那里另外两个儿子也出生了。未来的数学家在当地开始接受教育，并升学到霍伦的高中，然后当全家搬到哈勒姆后，在那里继续上高中。两年后他以16岁的年龄被阿姆斯特丹市立大学录取，但他在7年后才毕业，部分原因是服兵役而缺席。他不太喜欢军队，而且他的健康状况因此而受损。在他的学生时代，他与一些有趣的同学建立了联系，那些人帮助他拓展了知识面，而他也成为了名为"抗议者"的新教徒组织一个小分支的一员。他还分出时间去了意大利徒步旅行。布劳威尔一生都非常喜爱长途步行和其他形式的运动。

1904年，在他23岁时，布劳威尔与伊丽莎白·赫尔（Reinharda Bernadina Frederica Elizabeth de Holl）结婚，赫尔比他大了11岁，而且在前一段以离婚结尾的婚姻中育有一个女儿。他的妻子和他在健康、饮食还有裸体主义方面观念相同，并且对他的神秘主义想法有所共鸣。同年，他们在布拉里克姆建造了一间简陋的小屋，作为在阿姆斯特丹附近拉伦的主要住所的补充。布拉里克姆在距阿姆斯特丹沿岸的不远处，那里流行着早期的嬉皮文化及公社等。那里的大多数人住在临时居所里，那些房子至今还在。布劳威尔一家在那里对神秘主义和草药学进行研究。

当布劳威尔还是个学生时，他已经发表了三篇关于四维欧几里得空间的旋转群结构的论文，之后又发表了两篇关于位势论的论文。这时期影响他甚深的是阿姆斯特丹大学的教授、著名应用数学家科特韦格（Diederik Johannes Korteweg），以及才华横溢的数学家、哲学家，但当时仍然只是中学教师的马努里（Gerrit Mannoury）。布劳威尔还做过一系列的讲座，之后以《生活、艺术和神秘主义》（*Life, Art and Mysticism*）为题出版。1907年他结合几个课题发表了博士论文《论数学基础》（On the foundations of mathematics）。他的论文导师科特韦格，劝阻了他将一个哲学环节也纳入其中。布劳威尔称解决了希尔伯特于1900年国际数学家大会上所提出的问题中的三个，即第一个连续统假设，第二个算术公理的相容性，以及第五个李群理论的可微条件。然而，尽管他对这几个问题分别都有有趣的说法，但他的前两个问题被认为避开了主要的议题，而仅仅有一个建设性的框架，而最后一个问题则仅限于单参数的情况。这些问题布劳威尔之后都继续研究了下去。

1908年布劳威尔参加了第四届罗马国际数学家大会，在那里他发表了两次演讲。其中一次他阐述了对希尔伯特第五个问题的研究成果，而这次他拓展到了二维，该演讲之后在《数学纪事》上发表。在大会上，他有幸见到了其他数学家，特别是阿达马，他为布劳威尔提供了大量的建议和信息。布劳威尔对达布和皮卡十分敬佩，但是却因为米

塔-列夫勒的外表而不太喜欢他。见到庞加莱是一个意外收获;似乎他当时还没有接触到庞加莱的出版物。

在那时舍恩弗利斯(Arthur Moritz Schoenflies)是点集拓扑学方面的权威专家。尽管他被公认是一位了不起的演说家,可是他发表的作品却是草草完成的。布劳威尔发现舍恩弗利斯声称的一些成果中所依据的是他自己的研究结果,但没有恰当地提供证明,甚至是错误的。他给希尔伯特写了一封批判性的报告,尽管有些不情愿,希尔伯特还是同意将其和舍恩弗利斯本人的一些评论一起刊登在了《数学纪事》上。布劳威尔从此开始对点集拓扑学展开了充分的研究,而当他的结论在他的论文《论拓扑学》(Zur Analysis Situs)里发表后,他证明了该学科的几位先驱所作的一些直观假设是无效的。他随后继续写了其他关于点集拓扑学的论文,包括对于若尔当曲线定理的一个简炼的新证明。布劳威尔对点集拓扑学的研究方法与豪斯多夫颇为不同。豪斯多夫是公理法的伟大追随者,而布劳威尔却对此不以为然,争辩说数学应当基于合理的直观,而非公理。

然而他当时最引人注目的研究是讨论不动点的存在性,例如关于"在球面上一个点都没有留在原位置的情况下,该球面能否一一连续映射到自身"。在否定了这个问题之后,尽管没有扩大到高维度,但是他将论证扩大到了曲面。当然,不动点问题早先在庞加莱关于微分方程的文章中就提到过,但因为总是限定了相关的函数而不需要用到布劳威尔的方法。布劳威尔不动点定理以各种方式归纳而成,是拓扑学的经典定理之一。另外一个定理是现在学生们熟知的毛球定理,它用于处理环绕奇点的曲面上向量场的性态。

1909年完全是布劳威尔致力于拓扑学研究的一年。当他被阿姆斯特丹大学聘用为无薪讲师时,正值他们要重新加强几何学教学。他的就职演讲题为"几何学的本质"。他认为数学理论,特别是几何学理论应该基于拓扑学,并本着希尔伯特《几何学基础》的精神。布劳威尔在希尔伯特到斯海弗宁恩度假时遇见了后者,并在布拉里克姆开玩笑

说:“这个夏天,世上第一的数学家在斯海弗宁恩。我已经通过自己的研究与他联系过,但是现在我多次与他一同散步,像一个年轻信徒与先知一样进行交谈。”布劳威尔的下一个圣诞节与弟弟一起在巴黎度过,也就是在那里他构建了连续函数单纯逼近的想法。他发现通过这个结构,由高斯发现并由克罗内克加以发展的、已确立的代数概念“度”,可以被延伸到一切连续函数里来,然后他在1910年的元旦兴奋地给希尔伯特写了一封信。

接下来的非凡两年里,布劳威尔大刀阔斧地对拓扑学进行了改变,将庞加莱已经五年未有建树的状态进行了巨幅提升。在一个重要的事情上,他陷入了与法国分析学家勒贝格争论先后的窘境。关于维度这个直观的概念由来已久,但是康托尔揭露了直观性在这方面具有严重误导性。这也伴随了维度的拓扑不变性这一基本问题的出现。布劳威尔在1910年10月对荷兰数学学会展示了他对不变性的证明,并且在几个月之后由《数学纪事》刊登。当它被刊登后,令布劳威尔困扰的是,编辑部还收到了一封来自勒贝格的高高在上的信件摘要,里面概述了同一结论的另一种证明方式。布劳威尔快速地指出,尽管勒贝格的方法有用,但是他忽略了一个主要的难点。这件事带来了诸多不快。不久之后布劳威尔卷入了另一个类似的争论,这次是与克贝*争论自守函数理论,布劳威尔对域的不变性的证明最终使他证实了庞加莱的论证。

布劳威尔经常将证明留给读者自己解决,这使他的研究工作很难让人领会。虽然如此,在他最多产的阶段尾声,他仍在国际上建立了良好的声誉,而且多少有点迟来的,他开始在荷兰本土受到了一些认可。布劳威尔在1912年被选入阿姆斯特丹皇家科学院,并且被聘为阿姆斯特丹大学的副教授。次年他收到了格罗宁根大学正教授职位的邀请,但是当科特韦格慷慨地同意与爱徒互换职位后,布劳威尔立刻就在阿

---

* 克贝(Paul Koebe, 1882—1945),德国数学家,主要研究复变函数论。——译者

姆斯特丹大学成为了正教授。这使他从困扰多年、身为无薪讲师的拮据中解脱出来。

在为《数学纪事》审阅论文而花费大量时间的同时,他也与德国数学家们建立了深厚的关系,直到第一次世界大战阻断了这些国际联系。尽管布劳威尔作为审阅者经常过度挑剔,但作为对他的一种认可,他被增选入了编委会。1915 年一位去布劳威尔家用餐的宾客这样形容他:"他是一位感性的人士,同时也是一位有着迷人举止的天才。让人好奇的是,数学天才总是会同时具有开明和高贵的品格。他有着良好的教养,并且拥有一个敏锐、超凡脱俗的头脑,他不蓄胡子,有着轻微的皱纹。他只有 34 岁,身着白色亚麻西装。他当时正坐在地板上,全神贯注地与人谈话。"

战后布劳威尔发表了一系列关于曲面拓扑学的论文,但是他主要的研究方向越发集中在数学基础方面了。柏林大学、格丁根大学和莱顿大学都相继劝说他离开阿姆斯特丹大学。柏林的相关组织有效地总结了他至此的成就:

> 他的论文主要与拓扑学相关,多次的挫折为他提供了坚实的基础。在他的研究的主要结论中,我们只需提及维度不变性和利用闭曲面对空间分解的证明、域的不变性定理、连续变换球体的不动点存在性定理,以及影响深远的连续变换群的理论研究。布劳威尔将这些定理大量运用于函数论中基本单值化定理的证明,也为现代物理和天文学上的微分方程带来了光明的前景。布劳威尔理论的原创性不是年轻一辈数学家所能企及的。布劳威尔有着广博的知识和极深的智慧,不止在纯粹数学领域,在应用数学范围里也同样如此。他可以流利地说德语,并曾在学术圈内用德语进行过绝妙的演讲。他的政治观点完全倾向于德国。

布劳威尔成功地以一些邀约获得了阿姆斯特丹大学的妥协,他的

雄心是要建立一个能与格丁根大学匹敌的数学系。他给也是属于直觉主义的外尔提供了一个席位。在外尔决定留在苏黎世联邦理工学院后,他考虑聘请荷兰裔的伯克霍夫。最终,除了来到荷兰乌得勒支的法国数学家当茹瓦(Denjoy)之外,他没有吸引到足够高水准的外国数学家成为他的同僚,而他认为这该归咎于阿姆斯特丹大学的官方。布劳威尔经常访问格丁根大学,而他也被选入了马克斯·普朗克科学促进协会。为了方便行事,他在哈茨山脉旁弄到了一个度假房。

到那时布劳威尔在拓扑学方面的发现才开始被其他人,特别是柏林大学的施密特(Erhard Schmidt)和普林斯顿大学的亚历山大及维布伦认可。此外,布劳威尔本人在格丁根大学遇见了俄国拓扑学家亚历山德罗夫和乌雷松(Uryson)之后又回归了这个学科,并且邀请他们去布拉里克姆拜访他。布劳威尔越发享受着自己身为古鲁*,而将家里变成数学家们的麦加圣地的状态。有一批固定的年轻拓扑学家会来咨询他,包括霍普夫、胡雷维奇(Hurewicz)、门格(Menger)、纽曼(Newman)、诺特和菲托里斯(Vietoris),有些人到访过好几次。可惜的是布劳威尔保存的日记在1928年被偷走,并且再也没有找回来过,其中最让人感兴趣的是他列举了展开讨论的场地。

门格和胡雷维奇从维也纳大学来到阿姆斯特丹大学和他一起研究维数论,但不幸的是布劳威尔和门格很快就决裂了。胡雷维奇成了布劳威尔的助理,并且以一系列经典的"研究短文"打下了同伦论的基础。布劳威尔1912年就开始考虑连续函数的同伦论,或者说连续变形。他已经证明了度是同伦不变量,之后又证明在某些特定情况中,度表示了同伦类的特征。同样成为他助理的弗赖登塔尔则对新理论作出了很多贡献。后者写道,尽管大师全神贯注于用自己的直觉主义原则重建数学的计划,"不管如何,他的到场就能激励两位助手"。

由于希尔伯特的档案早于布劳威尔,我们已经提及过他们彻底决

---

* 印度北部锡克教地区最初10名领袖之统称。——译者

裂的情况，所以只需要在此稍作提醒。首先，布劳威尔和希尔伯特对数学的基本原理有着相反的理念。希尔伯特是一位形式主义者，他将数学建立在一系列需要证明相容性的公理之上。布劳威尔是一位构成主义者，他不接受基于排中原则的论证，而他的构成主义自成一派，被称为直觉主义。其二，在德国参加1928年博洛尼亚国际数学家大会的问题上，布劳威尔认为拿到的请帖颇为讽刺。而我们看到，当时健康不佳的希尔伯特，对布劳威尔的态度过于激烈，在同事不太情愿的支持下，不甚光彩地将布劳威尔从《数学纪事》的编委会里赶了出去。这彻底疏离了布劳威尔，而他再也没有回过格丁根大学，他的第二个家，并且与那位他曾经认为世界上最伟大的数学家形同陌路。

布劳威尔对希尔伯特此举的回应是在1934年创立了一个新的期刊《数学论文集》。与一些人的期望相反，它是一本高质量的正规数学研究刊物，而不只是直觉主义的宣讲册。在他50多岁时，布劳威尔主要致力于发展直觉主义数学，他相信这应该取代通常意义的数学。这意味着许多结论将被否定，例如他自己的不动点定理，但是值得欣慰的是，他以与传统数学无关的方法得到了新的结果。似乎由于希尔伯特让人沮丧的攻击行为，为了自保，他通常都独自工作。不幸的是，一些或许能帮助我们更好地理解他当时想法的论文，在1943年的一场大火中被焚毁了。在很长一段时间里他没有再出版过关于拓扑学的论文，之后1939年一篇关于微分流形的三角剖分的论文问世了，可能当时他又开始思考拓扑学了。

第二次世界大战期间，布劳威尔很少发表论文，之后他继续开始基础原理的研究。以1927年他在柏林大学为反对希尔伯特学派所作的演讲为基础，他在1946年到1951年期间在剑桥大学对该课题进行了一系列的讲座。他将这些写成了一本书，但是从未出版。尽管他为直觉主义所作的努力并没有产生强大的效应，但是他在学科方面的声誉却毋庸置疑。然而在荷兰，他对德国的民族主义支持却从未被原谅，而且似乎不太公平的是，他被怀疑与德国勾结。他所创建的《数学论文

集》在战争期间被停刊，而当它复刊之后，布劳威尔发现自己已经不再是一位编辑，而只是一位挂名的领导者了。

布劳威尔身形高挑，纤瘦而结实，容貌深邃而低调，嗓音轻柔而温暖。熟知他的人说他是一位优秀的演讲者，特别是在有着一小群热忱的听众时，但是在课堂上他却更容易引发灾难。弗赖登塔尔和海廷*写道："他精细而准确的公式吓退了所有的数学家。"现在逻辑学家和哲学家仍然对直觉主义保持着兴趣，直觉主义分析法也仍然还有推崇者。布劳威尔从来不是一个随和的人，但是到了晚年更加难以沟通，他变得喜爱争论和异常古怪。他的大部分论文，包括大量的通信，在小屋的一场大火里被焚毁了，此后他通常会随身携带重要的论文。

1951 年布劳威尔从大学退休。威廉明娜女王(Queen Wilhelmina)于 1932 年授予他荷兰狮勋章；他之后收到的荣誉大多来自国外。他晚年觉得对哲学所作的贡献没有获得足够的赏识，但是他作为数学哲学家，或者说更趋于一位前沿拓扑学家，在历史上的地位仍然牢固。1966 年 12 月 2 日，他在布拉里克姆的住所附近被一辆穿过路口的车撞倒，因此逝世，享年 85 岁。他的妻子赫尔先于他 7 年过世。他们没有孩子，只有一个不喜欢他的继女。他的继女是在学龄时期进入他们家的，之后成为了布劳威尔的秘书和密友，到访者经常不知道如何给她定位。

诺特(1882—1935)

我们现在开始讨论第一位毋庸置疑可被称作"伟大"的女性数学家。就像外尔在她的葬礼上所说的："对她在学科上的成就和对她人格的追忆不会在朋友间轻易消逝。她是一位伟大的数学家，我坚定地相信她是女数学家中最伟大的，当然她也是一位伟大的女性。"阿马

---

* 海廷(Arend Heyting,1898—1980)，荷兰数学家和逻辑学家。他是布劳威尔在阿姆斯特丹大学的学生之一，他做了很多工作来使直觉主义逻辑成为数理逻辑的一部分。——译者



莉·埃米·诺特(Amalie Emmy Noether)创新的现代抽象代数法不仅是一个重大的新发现,还在那些想要赶超她的学生和同僚中激发了高度的创造力。当纳粹开始在德国得势后,她被大学革职,随后她搬去了美国,而她刚要展开的新事业却因为她的英年早逝而终止了。

诺特1882年3月23日出生于埃尔兰根,她的父亲马克斯·诺特(Max Noether)是大学里的数学教授;他为同辈人所写的感性悼词总是蕴含着丰富的信息。她的母亲伊达·阿马莉[Ida Amalia,娘家姓考夫曼(Kaufmann)]来自科隆的一个富有的犹太人家庭。诺特的成长过程很普通,直到18岁之前都在地方高等女子学校就读,然后她在一所女子教育学院担任法语和英语老师。法国女性从1861年起被允许进入大学,英国是1878年,意大利是1885年,然而在德国,即使到了1900年,这仍然不被允许。教授们甚至经常拒绝女性来听他们的讲座,并且鲜少有女性被允许参与大学入学考试。埃尔兰根大学的学术委员会于1898年通过了一项提议,声称对女性学员的招生将"在所有学科中被禁止"。

然而诺特立志要成为大学生,她也从不轻言放弃。她修习了埃尔兰根大学和格丁根大学的数学及其他科学学科,并且在1904年埃尔兰根大学首次对女性招生时进入了该校。她真正的能力显露得较慢。可是到了1908年,她已经在父亲的同事、她从儿时起就认识的哥尔丹指导下完成了论文《论三元双二次型的完全不变量系》(On complete systems of invariants for ternary biquadratic forms),以最优等的成绩获得了博士学位。

接下来的七年时间她留在了埃尔兰根大学,没有任何职位,只是稍微教些书,但主要致力于研究。在此期间她开始与代数学家菲舍尔

(Ernst Fischer)合作,他将她从哥尔丹的算法论引领向了希尔伯特范围广阔的理论风格。这一方向的转变让希尔伯特和克莱因向她发出了到格丁根大学的邀请函。当时新出现的相对论引起了巨大的反响。诺特是最先明白其含义的人之一,并贡献了两个对广义相对论来说十分重要的新结论。希尔伯特想为她保留一个学术席位,但是却有太多反对之声。这激起了那次他在教员大会上著名的大爆发:"我不认为候选人的性别是一个反对她成为编外讲师的依据。总而言之,我们是一所大学,而不是一间澡堂。"然而,据传反对之声更多是因为她激进的政治理念而非她的性别。直到 1919 年改革之后,她才以 37 岁的年龄成为了编外讲师。3 年后她得到了非正式副教授的荣誉称号,但是不负官方责任,也没有固定薪水和养老金。虽然如此,她还是担任了格丁根大学一些博士生的论文指导者。

对数学研究的迫切之心和一腔热情让诺特成为了一名高效率的老师,尽管她并不被认为是个好的演讲者。她的讲课方式就像她的思维,是高度概念化的。比起简单的讲课,她会更多地进行讨论环节,与她的学生探讨一些课题。她喜欢和他们一起共度课余时光,特别是长途步行。有时她会太过专注,以至于学生们不得不提醒她注意交通安全。一个让人记忆犹新的情形是,一次在课堂上,她的衬裙掉了下来,她弯下身,扯下了裙子,把它扔到走廊上,然后继续上课。

杰出的数学家通常在他们职业生涯的早期做出最大的贡献;诺特是个例外。她在 40 岁左右开始创造她最重大和创新的研究成果。她以 1920 年的一篇讨论非交换域(如四元数)的论文开始转变风格。在接下来的几年里,她发现了一个非常抽象和普通的方法用于代数的公理化发展。经外尔证实,她发现的是一个崭新的、划时代的代数思考方式,之后由她的学生范德瓦尔登(van der Waerden)写进了他著名的现代代数教科书里。她 1921 年关于理想论的论文中建立了诺特环的概念,而这篇论文也争议性地成为她最佳的成果。"你可以在戴德金的著作中找到它",她曾经说过,也许戴德金建立了这个基础概念,但却

是诺特充分拓展了这个理论，并对现代代数产生了巨大的影响。

到此刻诺特达到了影响力的最高点，而且她的理念迎来了越来越多的赏识。她在1928年博洛尼亚国际数学家大会上演讲，于1928—1929年的冬季在莫斯科大学和共产主义学院上课，并且在重要的1932年苏黎世国际数学家大会上担任主要演讲者。在格丁根大学，她最终被聘为副教授。尽管她对格丁根大学成为欧洲数学第一中心（有许多人会说是世界中心）做出了巨大贡献，但是她从来没有获得最高级别的正教授职位。在她50岁生日之际，她那被称为“诺特家族”的代数学家小组，为她举行了庆生大会。

仅仅一年之后，纳粹当政，如我们所知，他们的第一波行动之一就是驱逐“非雅利安人”的政府官员，其中包括大学教授，但他们享有一些特赦。格丁根大学大多数的数学教员是犹太人，他们自此被禁止在大学教学甚至进入数学系。有一阵子莱夫谢茨继续与学生和同事非正式地会面，邀请组员去诺特的公寓，并且和她那些失望的同事们试着决定接下来该怎么做。诺特认真考虑过转去莫斯科，在那里她有人接待，但是亚历山德罗夫却无法说服大学当局及时做出所需行动。同时美国方面也为了她在努力着，1933年年末，她到达美国，获得了布林茅尔学院的一个临时职位。美国方面最初的计划是邀请她去牛津大学，但是最终却是由洛克菲勒基金会支持，为她在布林茅尔学院提供了1933年4月春季学期的职位。通常洛克菲勒基金会只会为有着固定职位的确切计划提供赞助，但是她对本科生教学没有兴趣，而布林茅尔学院没有意愿提供其他职位。然而，她的支持者们，包括伯克霍夫、莱夫谢茨和维纳成功劝说大学延长了她的聘期。

尽管这个学院有一些数学方面的传统，如我们所知，其数学系只由4位教员和5位研究生组成，他们中无人涉猎抽象代数。莱夫谢茨将其中4位学生收入翼下，并且用德语夹杂着英语给他们上课。以诺特特有的好奇心和善良的本质，她快乐地融入了新家。她从一开始就努力地说英语。她想要了解在美国的处世之道，不论是关于举行一次茶

会还是获得一个博士学位,她以圈中无人能及的正直无害和钻研劲头进军每一个学科。她的研究就像呼吸一样必要和自然,宛如与生俱来;但是研究只是她与学生联系的核心部分。她与他们生活在一起,绝不装腔作势。她以率直的友善和毫不做作的关怀看待这个世界,而她希望他们也能如此。她喜爱散步,大多数星期六,她都和五六个学生一起在大学周围闲庭信步,无所谓天气的好坏。

在布林茅尔学院,她可以去拜访其他朋友,以及同样从德国来到美国的前同事。她每周都在普林斯顿大学上一节代数学的课。这些优秀的听众包括阿尔伯特(A. A. Albert)、布饶尔(Richard Brauer)、雅各布森(Nathan Jacobson)、范迪维尔(H. S. Vandiver)和扎里斯基。她在格丁根大学的助手奥尔加 · 陶斯基(Olga Taussky),追随她来到了布林茅尔学院,并且经常陪伴她一起去普林斯顿大学。她回忆道:“我记得有一次她要将二项式定理应用到一个非常特殊的情况中去。即使她对困难的代数结构有着非凡的洞察力,这种计算对她来说也是一项重大挑战。然而她随即征服了这个问题,并且十分得意。实际上她大概有三次从黑板前转过身骄傲地对着我们微笑。”

那么她私底下是什么样的呢?“温暖如同一条面包”,外尔写道,“她身边洋溢着一种范围甚广的、舒适又有活力的温暖。她极度近视,戴着镜片很厚的眼镜。她丰满,不拘小节,大声却又那么善良,以至于身边的人都爱她。她很少考虑穿什么、吃什么之类的问题。人们,特别是那些不认识她的人,很难从她外表的冲击中缓过神来。特别是,有这么一块手帕,她会将它叠在衬衫里。上课时她有一套方法将它抽出来再插回去,她的精力极度充沛,而这对观众来说非常瞩目。在她还没有将头发剪得参差不齐前,她会将它一点点盘起来,而到了讲座的精彩之处,它们会掉落下来。”

在她到美国的第一年年末,她短暂地回了一趟德国,并且惊恐地发现情况已经极度恶化。到了她在布林茅尔学院的第二年年末,她为了切除一个子宫肿瘤而住院手术。尽管手术并非绝无风险,但最终却很

成功。然而在医院时,她突然发起了高烧,显然不是术后栓塞就是感染,然后她突然在1935年4月14日去世,享年53岁。就在她去世前不久,她告诉普林斯顿大学的维布伦,过去的一年半是她此生最快乐的时光,因为她在布林茅尔学院和普林斯顿大学获得了在自己国家从未有过的欣赏。在火化后,她的骨灰被埋在了大学的图书馆边上;外尔以下面这些文字表达了对她的追思:

对于那些初次见她或者对她的创造力一无所知的人来说,很容易觉得她是个怪人或者取笑她。她体型肥胖而且嗓门粗大,这使人们不容易在与她的争论中获得发言权。和普通文人不同,她会激烈地说教。她拥有一个朴实而单纯的灵魂,但始终正直。她的坦率从来不带有攻击性。日常生活中她是最谦逊的人,而且绝不自私;她有种善良而友好的本质。而且她喜爱人们对她的认同;她会像一个被人在耳边夸赞的年轻姑娘一样报以一个腼腆的微笑。没有人能够否认美惠三女神*一直在庇佑着她;但是在格丁根大学,我们经常戏称她为“诺特先生”(一种男性化的称呼),这同样也是对她作为一名打破了性别阻碍且充满创造力的思想者的尊敬和赞誉。她有着与众不同的幽默感和社交能力,在她公寓里喝杯茶都能让人身心愉悦。她是一位善良而勇敢的人,随时准备帮助别人,有着最深的忠诚和感染力。而在我认识的所有人里,她定然是最快乐的一位。

两种特性决定了她的本性。第一是她的数学天赋和与生俱来的创造力。她不是上帝的艺术之手捏成的和谐事物,她更像是一块上帝吹入了他充满创造力的生气的粗犷原石。第二是她不存恶意的心,她不信邪恶——不像它在人类身上所能起到的作用,恶念从未出现在她的脑海中。最能向我证明这一点的是1933年夏天我们在格丁根共度的

---

* 美惠三女神指的是希腊神话中分别代表着妩媚、优雅和美丽这三种品质的三位美丽女神。——译者

最后一场风暴。和这次一样让人痛苦……把人们聚集在一起;而我对那几个月的片段有着万分鲜活的记忆。诺特,她的勇气,她的率直,她的义无返顾,她抚慰人心的精神,在围绕我们的憎恶和卑劣、绝望和痛苦中成为了一种道德上的抚慰。

R·L·穆尔(1882—1974)

我们下一位主角是20世纪美国最有影响力的数学家之一,尽管比起研究者来说,他作为教育家更为重要。虽然颇具争议,但是他的研究方法在他自己手里比起在其他人手里,获得了更巨大的成功。研究方面,比起克莱因学派的直觉主义,他更偏向于希尔伯特学派的形式主义,几乎完全以公理进行研究。



罗伯特·李·穆尔(Robert Lee Moore)1882年11月14日出生于当时得克萨斯州达拉斯的一个边界小镇上,是家里六个孩子中的老五。他是有着得克萨斯血统的南方人,向来直来直往。他的幼年被曾是前盟军军官的父亲所主宰。出于某些特殊原因,他在某种程度上来说是自学成才的,但是他的高中读得不错。1898年当他进入得克萨斯大学奥斯汀分校,他立刻成为校园中最有影响力的人物、师从西尔维斯特的霍尔斯特德的一名弟子。在被奥斯汀分校征召时,霍尔斯特德是普林斯顿大学的一位讲师。他的学生中有范因,1920年代普林斯顿大学最主要的代表人物之一。

当小穆尔(这样叫他是为避免和年长的E·H·穆尔混淆)还是奥斯汀分校的学生时,霍尔斯特德对希尔伯特刚出版的《几何学基础》特别感兴趣。这本影响力极大的著作的伟大之处在于,它尝试在一个严

谨的公理化体系内建立平面和立体几何。霍尔斯特德给小穆尔展示了这本著作,并且建议他检查著作中公理的独立性。当小穆尔发现其中有一条多余后,霍尔斯特德与芝加哥大学的 E·H· 穆尔交流了这个发现,结果发现后者几个月前得到了同样的结论。然而最终却是年轻人的推理更为简洁,因此霍尔斯特德将它以短文的形式写下,寄给了《美国数学月刊》(*American Mathematical Monthly*)。

1901 年毕业后,R·L·穆尔作为教学人员在得克萨斯大学逗留了两年。次年他的导师霍尔斯特德因为与当局的一系列抗争而被大学解雇。他开始给他的学生写信诉说此事的不公,并且表达了希望 R·L·穆尔在找到新的教学岗位后能和他再一起工作的渴望。他为这位年轻人提了许多建议,并给了他许多忠告。随着时间的推移,霍尔斯特德越来越多地向 R·L·穆尔咨询自己的学术工作,而在 1904 年 12 月,我们发现他告诉 R·L·穆尔:“你知道我似乎越来越倚重你的判断了。”霍尔斯特德的角色从导师转换成了钦佩他的同事之一。“你必须遵从自己的喜好”,他在 1905 年 7 月写信给 R·L·穆尔,“没有人能给一位天才确切的指导。”

霍尔斯特德的推荐和 E·H· 穆尔对这位年轻人潜力的赏识让他在 1903 年被芝加哥大学录取为研究生。在这里他发现了一个能够延续霍尔斯特德在奥斯汀分校创造的研究环境。当 R·L·穆尔到达芝加哥大学时,维布伦刚刚在 E·H· 穆尔的指导下完成博士研究,并且被聘请为副教授,所以他被叫来一起协助辅导 R·L·穆尔的论文。和维布伦自己的论文一样,这篇论文关注的是几何学的公理基础。事实上 R·L·穆尔早期的研究都与维布伦的紧密相关。两位年轻人的联系一度颇为亲密。他们显然还有相同的数学之外的兴趣,例如拳击。

1905 年在芝加哥大学获得博士学位之后,R·L·穆尔在诺克斯维尔的田纳西大学待了一年时间,他在那里写了一篇从未发表的论文,其中建立了他自己对于正整数及其算法的公理系统。他还开始对博雷尔的研究产生了兴趣。然而除了后来所取得的杰出成就外,他还在研究

一些与曲线相关的问题。在这儿我们还能察觉到一些莱纳对他的影响,那时莱纳还是芝加哥大学的一位研究生,而就我们所知,他当时和维布伦一起合写了一本分析学的教科书。莱纳创建了几个在 R·L·穆尔的研究中起着突出作用的概念,例如弧、简单封闭的若尔当曲线和连通空间。

R·L·穆尔的研究方向在他离开芝加哥大学的十年里逐渐发生了改变。在离开诺克斯维尔后,他在普林斯顿大学和西北大学分别教了两年课,随后 1911 年到 1915 年期间他在宾夕法尼亚大学落户。在费城期间他指导了几篇博士论文,但是费城那几年,他自己的研究方面却没有什么成果。到了 1915 年,他的想法开始从集合的公理基础转向了此后伴随他一生的课题。有一阵子 E·H· 穆尔和维布伦似乎都试着说服 R·L·穆尔多读一些数理逻辑,特别是在《数学纪事》上刊登的关于集合论基础原理,尤其是与选择公理和连续统假设相关的文章。然而 R·L·穆尔却是这些方面的柏拉图派,他将公理视为一种绝对的法则,而非一种为研究提供一致性和相容性的物件。在这方面他的观点和维布伦完全相对,而后者在他 1924 年美国数学学会就职典礼上致辞:"似乎不可否认的,形式逻辑被数学家所占领。事实上,现在不存在形式逻辑,除非数学家创造一个,不然没有其他人有兴趣来做这件事。"有趣的是丘奇在维布伦的指导下获得了博士学位,他的论文是关于建立在一个错误的选择公理上的集合论。

1915 年 R·L·穆尔转回了在奥斯汀的母校,至此他的事业与得克萨斯大学紧密地联系在了一起。那时他的专业是点集拓扑学(尽管他避开了 analysis situs 和 topology 两种说法,它们均指拓扑学)。如我们所见,点集拓扑学的一般形式只有在豪斯多夫 1914 年的《集合论基础》里出现过,而豪斯多夫将这种拓扑学视为集合论的一个分支。它建立在由一组公理形成的法则上,不过即使是平面集的拓扑也只是在探索阶段。然而组合拓扑学,特别在庞加莱的手中,则有着十分直观的内容,而为它建立一个坚挺的逻辑基础的工程并未完成。在维布伦带

领下的普林斯顿大学开始专攻组合和代数拓扑学；不久之后得克萨斯大学和普林斯顿大学之间发展出了一种强烈的竞争关系。

尽管直到20世纪中期这两种拓扑学仍然维持着繁复交错的关系，但是最终它们在欧洲也分离了开来。而在美国出现的这一强烈的竞争关系至少有一部分是由于一些参与其中的个性强势的人物。这与普林斯顿大学的维布伦没有太大关系，主要是由莱夫谢茨带领的那些组合学家们，尽管莱夫谢茨和R·L·穆尔对彼此的厌恶有些被夸大，但不可否认他们的关系也确实不怎么样。1931年，R·L·穆尔被美国数学学会聘请为客座讲师，成为了第一位获此殊荣的美国本土人士，并在巡回演讲中回到了普林斯顿大学。莱夫谢茨的助理塔克说道：

> 我觉得纯粹是出于恶劣的心态，R·L·穆尔将他的第一次讲座安排在了周六晚上，接着是周一和周二的下午。好吧，莱夫谢茨和亚历山大四处奔波告诉研究生们“这次你们必须出席。你们没有选择权。必须到场。”因此房间客满。莱夫谢茨与对待其他演讲者一样，向R·L·穆尔表达了自己的兴趣，亦即提出问题。同时莱夫谢茨这么做也有一部分是为了帮助那些研究生。R·L·穆尔一开始在黑板上写下了他的公理。大约有五分钟左右，除了粉笔在黑板上书写的声音之外，全场静寂无声。
>
> 然而，莱夫谢茨是一位非常非常不安分的人，所以最终他以提问的方式打破了局面。R·L·穆尔缓慢地转过身来看着莱夫谢茨说道，“如果你读了我在黑板上写的东西，你就不会问刚才这个问题了。”莱夫谢茨不停地问着问题，当然我们知道这就是他的风格，但是每个问题对R·L·穆尔来说都如鲠在喉，所以他总是以一种轻蔑的方式艰难地转过身来（给予回应）。亚历山大其实试着介入其中，并帮着莱夫谢茨缓解一下，但是R·L·穆尔总是轻松获胜。就我看来，每个人都没有向R·L·穆尔表现兴趣、关怀和尊敬。但是之后在他到访的其他地方，我获悉他对于所受到的待遇做出了非常刻薄的评价，特别是对普林

斯顿大学的莱夫谢茨教授。

从1919年到1932年,R·L·穆尔发表了38篇研究论文,超过了他半数的成果。他在1932年出版了《点集理论基础》(*Foundations of Point-set Theory*)的第一版。这本书来源于他为美国数学学会所作的专题演讲。细数他的出版物,其中有一本是出于他对公理法的偏好而产生的。除了这本书,他的66篇研究论文中有不少于15篇是基于公理的。纵观R·L·穆尔的一生,主要是这方面反映出了他来自20世纪初芝加哥大学的背景。

1930年后,R·L·穆尔在研究上所花的精力变少,而将更多精力放在了教学上。他的许多课程,以及之后许多他的研究生所作的研究都建立在他的著作的基础之上。显然,使他功成名就的教学方法是从E·H· 穆尔的实践上发展而来的,这在上一章中已有表述,而这些似乎又是从德国的后期经验上衍生出来的。总之,R·L·穆尔还在芝加哥大学读研究生时就已经构建了他方式独特的基本构想。当他参加讲座时,为了自娱自乐,他会看自己能否在讲课者完成演讲前就找出所学定理的证明方法。他不一定总能成功,不过总值得一试。所以他觉得,如果能让学生们自己去证明一个定理,那么不仅能给他们更深的理解,而且对他们的能力和兴趣在某种程度上也是一种提升。当然如果定理太难的话,那就需要将它们分解成合理的几部分。与之类似的数学教学方法经常被牛津大学的导师们运用,而他们称之为苏格拉底问答法。

当他越发认为让学生自己探索发现是这门学科的主流时,他也越来越确信,如果可行的话,这对学生来说也颇具吸引力。当他有机会在宾夕法尼亚大学将之付诸于实践时,结果是成功的,特别是在他的几何基础课上。这是一个新鲜的、相对来说崭新的领域,而R·L·穆尔本人也测试了一些理论的难易度。在他回到奥斯汀分校的那些年里,他将在有限范围内使用的讲课方法扩大到了他的所有课程,特别是在几何学基础和(研究生程度的)拓扑学里。以博士后的研究产出来看的

话,其结果是惊人的。

R·L·穆尔想细心地选择一些成员来开始他的研究生拓扑学课程。如果学生已经在别处学过拓扑学,或者已经读过太多(相关课题),那他们会被除名(有时候他会为这些学生另开一堂课)。他的想法是尽可能组成一个知识同样空白的拓扑班级。他经常会警告这个小组不要去阅读任何与拓扑学有关的东西,只是纯粹发挥他们自己的能力。据说他还将图书馆里所有可能与此课题相关的书都清理干净。简单地说,由于竞争是进步的驱动力之一,他希望这场竞争尽可能地公平。这个班级一直维持着小团体的形式。在此,他在普林斯顿大学作为教师的经验成为了有用的积累。

R·L·穆尔的学生都知道他痛恨与逻辑基础相关的问题。他也极其反对在点集拓扑学里引入代数法。如他的学生怀尔德(Wilder)描述的:"R·L·穆尔本人对代数拓扑学完全没有涉猎。被武断的偏见所蒙蔽,他极力避免代数法,而当作为一名公理基础论的布道者时,他显然将所有的个人数学理念和信仰都建立在了一些纯粹的直觉上,而这些教条一旦被宣布,便不能再修改了。对他来说,选择公理是一种真理,而非一种便利工具,而在他面前质疑这点的话会让他恼怒。"当然,尽管他异乎寻常地教条主义,但那段时期不只是他一人有此信仰。大多数"传统"数学家认为,没有任何理由可以质疑选择公理。奥斯汀学派与波兰学派在拓扑学上见解颇为一致,他们都坚信同调论应该被极力避免;而这似乎也是布劳威尔的偏好。

美国大多数最重要的点集拓扑学家都是R·L·穆尔的学生。其中最著名的包括密歇根大学的怀尔德、弗吉尼亚大学的怀伯恩(G. T. Whyburn)、得克萨斯大学的宾(R. H. Bing)、哈佛大学的莫伊斯(E. E. Moise)、杜兰大学的杨(Gail Young)、威斯康辛大学的鲁丁(Mary Ellen Rudin),以及路易斯安那州立大学的安德森(R. D. Anderson)。据估算,大约有超过500人曾经在博士阶段经过R·L·穆尔本人指导,或者经过他的学生和学生的学生指导。其中43人曾接受过他的私人指导。

在大学里,R·L·穆尔开始散播巨大的影响力。在会议上他很早就精心准备了评论,并且以强势的姿态发表观点:“就我看来,如果这个法规被采用,那么它将会使这所大学越发成为平庸之才的栖身之所。而现在已经有太多类似的保险措施了。”他极力反对招收黑人学生,但是同意招收女性学生。有人试着减少他的影响力。例如在1951年,有人提议以纪念他的导师霍尔斯特德为名设置一个荣誉讲师职位,但是结果却被否决,在一定程度上归咎于R·L·穆尔。在数学系,人们认为他的存在有将本想来到奥斯汀的一流数学家拒之门外的嫌疑。

R·L·穆尔在1930年入选了华盛顿科学院。他开始活跃于美国数学学会,并在1937—1938年成为主席。在1952年他到达强制退休年龄70岁后,他继续在大学里像全职时期一样教五门课。最终直到1969年,他被勒令彻底退休。那时他已经87岁,有如传说般的存在了。在奥斯汀校区内,1973年开始供数学系使用的新大楼是以R·L·穆尔的名字命名的。随后他经历了一次轻微中风,致使他行动不便。之后1974年6月他又遭遇了一次大中风,由此他在同年的10月4日逝世,享年91岁。64年之前,就在他将要离开西北部时,他与凯恩(Margaret MacLellan Keyn)结婚,她是他学生时期就认识的得克萨斯大学的同僚。他们没有孩子。他在普林斯顿大学时得了腮腺炎,导致了他的不育症。她在他去世的一年后也与世长辞。

R·L·穆尔可能是20世纪上半叶美国最具影响力的数学家之一,虽然比起研究者来说他作为教育家更为成功。“授课最少的才是最会教的老师”是他的格言。尽管他的许多学生在学术界出人头地,但是他在许多没有走这条路的人心中也留下了深刻的印象。“有史以来最好的数学老师”,他的一位学生这么说。但是如果一个学生只是想要搜集大量的信息,或者希望在学习小组里成为消极的一员,那么他们最好不要参加他的课。关于他的怪癖有诸多故事。他曾声称可以用数学方法证明他车子开得越快就越安全。他生来就非常有好奇心,当他使用公共设施的时候,他会以脚代手来开水龙头。

莱夫谢茨(1884—1972)

现如今大多数杰出的美国数学家都是土生土长的,但是在20世纪初却并非如此。比如从纳粹统治下的欧洲逃亡而来,在美国再次开展事业的避难者们。人们很难将诺特和外尔描述为美国数学家。然而许多移民来得更早一些,而其中最为杰出的人物之一就是前文已经被提及过的所罗门·莱夫谢茨(Solomon Lefschetz)。



居住于莫斯科的亚历山大·莱夫谢茨(Alexander Lefschetz)和韦尔巴·莱夫谢茨(Verba Lefschetz)夫妇为了避免在俄国遭到针对犹太人的镇压,一早就取得了土耳其国籍。他们的儿子,未来的数学家所罗门·莱夫谢茨出生于1884年9月3日;他与下一节的主角伯克霍夫同年。他的父亲,一位因为工作需要长时间离家的商人,决定让全家定居巴黎。鲜少有关于他早期生活的记录,直到他18岁成为巴黎中央工艺学院的学生,修习阿佩尔和皮卡这些大师们的课程。

在巴黎中央工艺学院学习了三年之后,年轻的莱夫谢茨获得了"制造业和工业工程师"的学位。他随后在1905年11月移民美国,并且在短暂的学徒期后成为了匹兹堡西屋电力和制造公司的工程师。1907年至1910年期间他在这家公司工作,但是一场工伤让他失去了双手和前臂,使他突然结束了在机械工业上起步的事业。

在医院里度过一段时间后,莱夫谢茨决定转攻纯粹数学,抱着这个想法,他成为了克拉克大学的研究生。这家非凡的机构是由克拉克(Jonas Gilman Clark),一位在高等教育上发展出强烈兴趣的成功商人所创办的。也许是受到他的好友斯坦福(Leland Stanford)的激励,他也

决定创建自己的大学。1887 年马塞诸塞州立法院同意建立“一所促进科学、文学与艺术的教育研究机构，设在伍斯特市，称为克拉克大学”。克拉克相信后续会有公有资金来补足他最初的捐赠。

最初，他想象自己的新大学将“比哈佛大学更高端”。他对法国和普鲁士（但没有英格兰）的大学印象深刻，而在美国他认可康奈尔大学，但是又认为 10 年前建立的霍普金斯大学尤其值得效仿。但是他主要由哈佛校友组成的评议员委员会，顾虑到在伍斯特建立一所强大的学校可能会影响到旁边那所历史悠久的大学。他们劝说克拉克从专注于一个领域的研究生水平的研究开始。第一位校长名为霍尔（Hall），他遵循了这个方针，但是显然只有克拉克本人仍然想要将它建立成一所全方位的大学。这所新的学院在 1889 年 10 月建立，它由数学、物理、化学、生物和哲学的研究生部门组成。大约 30 多位学生由分布于 5 个部门的 19 位教员教导。

在数学方面，霍尔就像他的前辈、霍普金斯大学的吉尔曼一样，试着引起克莱因的关注。他从欧洲向克拉克汇报说：“我已经全面了解了我们经常提起的、欧洲最好的数学家克莱因教授，他在欧洲也得到了最具判断力的专家的认可。我最近用了几个小时和他讨论到伍斯特加入我们的可能性。他表示，如果能有巴尔的摩的霍普金斯大学提供的每年 5000 美元的薪水，他愿意加入……他告诉我，他主要是被能与很小部分人只从事非常前沿的探索，并继续他自己的研究这一机会所吸引。”

然而，和霍普金斯大学的情况一样，沟通无果。克莱因转去了格丁根大学，专注于在那里建立一个研究基地，他并没有真正想要离开。他真正寻找的似乎是一些定期的访问任命，但是他发现普鲁士官方比较希望美国学生来德国学习，而不让克莱因去美国授课。尽管遭遇了挫折，但是霍尔还是成功建立起了美国至此最强大的数学部门。不久之后，新学校遭遇了越来越大的财务问题，这导致了大批的辞呈，11 位终身制教员中的 9 位离开了。克拉克的构想在洛克菲勒的芝加哥大学落

成,而且克拉克的最佳教员团队被芝加哥大学的第一任校长哈珀挖角之后更为衰退。

回到莱夫谢茨的职业生涯,多亏他在巴黎打下的良好基础,他只在一年之后就以一篇关于代数几何的论文在1911年获得了博士学位。尽管克拉克大学当时只初具雏形,但是莱夫谢茨十分感激他在那里受到的教育:"在克拉克大学很幸运有一位一流的图书管理员威尔逊(L. N. Wilson)博士,以及一个维护良好的数学图书馆。这正好可以让我们两个人乐在其中——我的数学研究生同学,也是将来的妻子,以及我自己。我充分利用这个图书馆学习了许多十分有趣的新领域,特别是杰出的意大利代数几何学派。"

莱夫谢茨对伟大的意大利代数几何学家卡斯泰尔诺沃(Castelnuovo)、恩里克斯(Enriques)、塞韦里(Severi)和一些其他的数学家们[据罗塔(Gian-Carlo Rota)所说,这些都是和他在思想的深度和观点的草率上旗鼓相当的人]推崇备至。莱夫谢茨在1912年成为了美国公民,并且在次年与他在克拉克大学的同学海斯(Alice Hayes)结婚。她放弃了自己的职业生涯,为他提供了一个温暖的家庭,帮助他从最初的绝望中恢复过来并直面人生。后来有时当他在各种场合过度亢奋时,她都能成功让他冷静下来。

离开克拉克大学之后,莱夫谢茨获得的职位越来越高,先是在内布拉斯加州立大学干到1913年,然后在接下来的10年里来到堪萨斯大学。就是在这段时间里,他在大草原上直面自己的残疾,重塑了自信,并且为一个全新的职业奠定了基础。就如他自己所说的,他与数学一起与世隔绝,而这种情形最大的收获就是让他能够建立起完整的数学理念,将拓扑学运用于代数曲面理论,特别是对意大利学派的研究中。他默默无名地来到大草原上,在14年后以当时最杰出的几何学家之一的身份离开。就像他所形容的:"代数拓扑学的鱼叉已经插入代数几何学这条巨鲸上了。"莱夫谢茨在代数几何学上的重大贡献大部分是在他离开堪萨斯大学之前完成的。

1924年,莱夫谢茨用了一年时间访问普林斯顿大学,后来他成为那里的一名教员。转去普林斯顿大学是他人生的一个转折点。他在到达的不久之后就发表了著名的不动点定理,但是他其余的重要理念都是在大草原上得出的。他发现在普林斯顿大学能够与一大批能力卓越的数学家们紧密联系,除了固定教员还有大量著名的访问学者。他对研究生们十分关心,其中被他看中成为博士生的有拓扑学家多克(Hugh Dowker)、史密斯(Paul Smith)、斯廷罗德(Norman Steenrod)、塔克(Al Tucker)、沃尔曼(Henry Wallman)和怀利(Shaun Wylie),而当塔克成为莱夫谢茨的助手后,经常在各种场合代表他出面。怀利发现莱夫谢茨的讲座非常具有启发性,"当然他知道什么才是重点和全局,但是他在细节方面不在行。听众人数庞大(对此他非常高兴),而细节则是靠群众的力量推敲出来的。人们可以学到很多东西。莱夫谢茨还经常提问,有时他会假装不懂,而有时他会加以说明。"

塔克引用了莱夫谢茨说的话:"人们在自圆其说前需要先明确想法",然后他评论道:"这就是典型的莱夫谢茨本人写照:他极有效率地明确想法,然后他搜集各方论据。他行动非常迅速并且富于想象。但是在严密的论证上他会陷入很大的困境。我听说莱夫谢茨做的任何证明都有可能是错的,但这只是因为他静不下来和不够耐心,所以他不会花时间去做出一个严密的论证。"再次引用塔克的话,莱夫谢茨"非常直言不讳,实际上,许多人觉得他很有攻击性,而有时这会导致不良后果。几位研究生因为他严厉的说教而离开了普林斯顿大学。那些对他的付出能给予相同回报的人会给他留下好印象;而那些在他的严厉下畏缩的人,像他经常说的,他对那些人毫无尊敬。"

尽管他大部分时间是正确的,但是莱夫谢茨也会犯重大的错误;最不光彩的一个事例是他最初拒绝接受关于调和积分的霍奇理论。如塔克所讲,"他的另一个特点:就算他知道自己错了,他也从不会承认,至少在当时当地不会。我们有过非常激烈的争论,而我恨不得掉头就走,就当从未认识过这个人。但是一两天之后,我会发现他已经接受了我

的观点，并且已经在此基础上继续下去了……在莱夫谢茨退休多年之后，我意识到一件事情，他老了，我终于可以在某一天争赢他了。”

然而不管怎样，莱夫谢茨似乎没有树立过敌人，因为在他的话语背后寻找不到任何恶意。他在激励人心，甚至是奉献方面有着超凡的能力。照塔克的话说，他从不以自己的义肢为理由。他从不会说，“我做不了那个，你来帮我做。”相反，他会将自己的需求变为一个简单而礼貌的请求：“请为我开一下门。”他会独自去纽约，请地铁里的陌生人帮他从口袋里拿出一个硬币，放进闸口。他不会说自己装有义肢，他只会简单重复自己的请求，直到全凭执着完成自己的目标。

1943 年莱夫谢茨成为了美国海军的顾问，研究制导系统和船只稳定性。他开始在非线性力学和控制论方面与苏联数学家们熟悉起来。莱夫谢茨发现最初由庞加莱和李雅普诺夫（Liapunov）提出的微分方程的几何理论可以被大量地运用于这些领域，而他自己在代数几何和拓扑学方面的背景也被证明十分有效。

战后新成立的美国海军研究局成为了美国政府资助数学科学研究的有力来源。这使莱夫谢茨得以在普林斯顿大学建立了一个研究常微分方程的重要中心。尽管这项举措在他 1953 年从大学退休后终止了，但是几年后他在巴尔的摩建立前沿学科研究院时将之重新开展起来，而这次不是由联邦政府，而是由公司赞助的。在这种形势下，研究院迅速因其研究成果，特别是在控制和稳定性方面的数学理论而闻名于世。1964 年，这个组织的大部分已经转移到了普罗维登斯市的布朗大学，并且将其改名为莱夫谢茨动力系统中心。在此期间莱夫谢茨还帮忙建立了《微分方程杂志》（*Journal of Differential Equations*），并担任其编辑长达 15 年。他在微分方程方面的研究体现了几何和拓扑理论的价值，还帮助提升了这类应用数学的声誉。他经常鼓励年轻同事，有些时候还会哄骗他们来证明一些重要的定理。

莱夫谢茨一生都热爱旅行。20 世纪二三十年代，他多次出访欧洲，特别是法国、意大利和苏联。在第二次世界大战期间无法正常造访

欧洲，莱夫谢茨将精力贡献于在墨西哥宣扬数学研究。尽管他不懂西班牙语，但是在他初次到达之后，几周内他就能用该语言进行讲课了。在1944年到1966年期间，他几乎每年都会去墨西哥城。为了表彰他建成一所活跃的墨西哥数学研究学院，他被授予了阿兹台克雄鹰勋章。在一长串的其他荣誉中，他还被授予了意大利科学院颁发的费尔特里内利奖章，以及美国国家科学奖章。莱夫谢茨于1972年10月5日在普林斯顿逝世，享年88岁。

第九章

从伯克霍夫到亚历山大

我们接下来要讲述的6位数学名家生于1884—1888年的5年间，其中2位来自德国，2位来自美国，另外2位分别来自匈牙利与印度。

伯克霍夫(1884—1944)

乔治·戴维·伯克霍夫(George David Birkhoff)以其成就跻身20世纪美国数学家的佼佼者之列[其子加勒特·伯克霍夫(Garrett Birkhoff)也是一位非常出名的数学家]，这不仅是因其教学与研究，作为国际科学界的一员，他的贡献与维布伦相当。在数学研究上，伯克霍夫自认为是庞加莱的弟子。他是现代动力系统理论的奠基人之一，延续了庞加莱的未尽事业。

伯克霍夫于1884年2月21日在密歇根州的欧弗里瑟出生，他是在芝加哥行医的外科医生戴维·伯克霍夫(David Birkhoff)与简·格特鲁德[Jane Gertrude，娘家姓德鲁佩斯(Droppers)]的六个孩子中的老大。父母两人均来自荷兰，是荷兰归正会的成员。儿子两岁时，他们举家搬迁到芝加哥，伯克霍夫便在此长大。1896—1902年，他就读于刘



易斯工学院（即今伊利诺伊理工学院）*。之后他转到芝加哥大学读了一年，随即前往哈佛大学，他此后的大部分学术生涯都将与哈佛大学相连。1904年，当他还是一名本科生时，便与范迪维尔（H. S. Vandiver）合作撰写了一篇关于数论的研究论文。他于1905年自哈佛大学本科毕业，第二年取得硕士学位。回到芝加哥大学攻读博士后，他在E·H· 穆尔的指导下就微分方程撰写论文，并于1907年获得博士头衔。伯克霍夫对E·H· 穆尔极为敬重，但他们的研究兴趣却大为不同。

随后两年，伯克霍夫在威斯康辛大学担任讲师，在此期间他与格拉菲（Margaret Elizabeth Grafius）结婚，他们育有两个儿子加勒特和罗德尼（Rodney），以及一个女儿芭芭拉（Barbara）。之后他于1909年前往普林斯顿大学做指导教师，两年后因哈佛大学试图将他召回而在那里被擢升为正教授。次年，哈佛大学达成所愿，伯克霍夫同意于1912年回返，虽然只是作为一个助理教授——这是哈佛大学在此时期享有的优越学术声誉的一个反映。这里所用的肖像是他次年所摄**。七年之后他晋升正教授之列，并最终于1932年获得讲席教授，这意味着从那时起，他大部分的学术生活可以投入到数学研究和研究生指导之中。

不过在那之前，伯克霍夫已经开始逐步参与哈佛大学以外的活动。在普林斯顿大学时，他已是美国版《数学纪事》的编委；在哈佛大学则转任《美国数学学会会刊》的编委，直至1925年他被选为该学会的主席，任期两年。这似乎让他与洛克菲勒国际教育委员会取得联系，从此

* 刘易斯工学院于1895年建立，1940年与阿芒技术学院合并为伊利诺伊理工学院。——译者

** 在伯克霍夫传略结尾处提到："所用照片展现了57岁之时的伯克霍夫"，此处似误。——译者

他开始担任这一重要机构的顾问。例如,1926年他在公休期间首次访问欧洲,就曾代表该委员会走访一些重要的数学中心。他的部分任务是了解那些受该委员会资助的欧洲数学家的工作进展,但他也得以向欧洲顶尖数学家咨询应当如何在美国加强该学科的建设。他得出结论:美国过于注重纯粹数学,有必要引入一些一流的现代应用数学家。在他的旅途结束之际,伯克霍夫汇报说:"我们拥有一些优质人才,他们从未进入任何优秀的数学中心,并最终丧失对科学的热情。我以为,在这方面,欧洲的情况比美国要好。"

哈佛大学的聘任使得伯克霍夫颇具影响力。他相信,他能够及早地识别出青年才俊,且在哈佛大学就能够经常发掘这样的人才。特别是1935至1939年出任文理学院院长期间,他常常发现自己不得不平衡美国青年和受纳粹压迫的流亡者的诉求,而身处两难。在哈佛大学,前者通常较受欢迎,遂导致一些反犹太主义的论调,及针对伯克霍夫和维布伦态度分歧的不友善评论。

哈佛大学和其他美国顶级高校施行一种配额制度,用以限制犹太学生和教员的比例。由于配额设定很低,尽管该制度仅是作为指导意见,也产生了一定效果。1926年,扎里斯基在罗马第一次见到伯克霍夫,问他:"犹太人想成为哈佛大学的学生困难吗?""不,一点不困难",伯克霍夫答道,"但我们会自然地保持一定的比例。犹太人口大约占3%、4%、5%,所以我们也就自然地录取3%、4%、5%。"很久之后,当扎里斯基应聘哈佛大学教员时,发现自己得到了伯克霍夫的大力支持,这使他颇感意外。另一方面,维纳坚信,如果不是伯克霍夫的反对,他将获得一个哈佛大学的职位,但即便这是事实,也不难设想一些十分得体的理由,让人相信维纳在麻省理工学院更为合适。

但毫无疑问,伯克霍夫对莱夫谢茨深为厌恶,他于1934年成为美国数学学会主席,而后者曾被提名参选此职。莱夫谢茨本应在这次当选,但那之前伯克霍夫曾私下致信当时的秘书长理查德森(Roland

Richardson),其中写道:“我有一种感觉,莱夫谢茨将来可能不会如他以往那样亲切友好,因为他从此将试图为他自己的种族奋力而积极地工作。他们对自己的权力和在美国的影响力极度自信……他会变得非常自大,非常种族化,会把《数学纪事》大量用作种族福利。”这类反犹太主义思想已经自欧洲传播至美国,伯克霍夫则更加鲁莽地表达了这种广泛持有的看法。有趣的是,访问拉丁美洲时,伯克霍夫的第一代美国人的身份对他颇有助益,他更多地被当做欧洲人看待。

由于其富有感染力的激情,伯克霍夫是一位能够激励人心的老师,尽管他的讲授未能条理得当,也并非明晰的典范。许多在20世纪中叶具有影响力的美国数学家,包括莫尔斯、斯通(Marshall Stone)和惠特尼(Hassler Whitney)等,都在博士或博士后期间跟从他进行研究。和他自己一样,他的6个早期学生成为华盛顿科学院的院士。在美国与其他地区,伯克霍夫都被普遍认为是那个时代最为重要的美国数学家,就如同他的老师E·H· 穆尔早先那样。两次世界大战中,他都曾承担部分军事研究工作。伯克霍夫法语流利,并曾用它撰写数篇他最为重要的论文,这可能是以此向庞加莱致敬。他也能使用西班牙语演讲。他东奔西走,推行他在科学家的国际交往方面的信念。因为研究上的卓越地位,他常常被召请在科学界中代表数学方面的利益。第一次世界大战后,他参与了格丁根大学和其他高校数学学科的重建工作。

鼓励拉丁美洲的科学研究是伯克霍夫晚年的主要努力之一,这与罗斯福(Franklin Roosevelt)总统的睦邻政策一致。为此目的,他曾在洛克菲勒基金会(即此前的“国际教育委员会”)的资助下,考察墨西哥、秘鲁、智利、阿根廷和乌拉圭等地。回国之后,他便支持拉丁美洲的数学事业,此外他还多方筹措,曾说服古根海姆基金会在拉丁美洲设立一个客座教授职位。莱夫谢茨首任这一讲席,并从1942年开始将其精力专注于墨西哥,获得显著成功。巴西的数学声誉尤其显著,在伯克霍夫专长的动力系统理论方面更是如此,

但他显然未曾造访该国。

伯克霍夫在欧洲特别是法国有许多密友,并对庞加莱深为敬服,将他视作自己的主要导师,虽然两人素未谋面。除庞加莱以外,伯克霍夫的师长之中,哈佛大学的博谢(Maxime Bôcher)和芝加哥大学的 E · H · 穆尔对他影响最大——博谢将他引入经典分析与代数之中,而 E · H · 穆尔则是他在"一般分析"上的领路人。与 E · H · 穆尔相似,伯克霍夫是认为美国的数学研究已然成熟的人之一。1936 年哈佛大学建校三百周年庆典上,哈代提出他的看法:当时在美国作出的创造性的数学工作是其他国家的三倍。伯克霍夫 1938 年的演讲"美国数学五十年"呈现了那一时期所得成就的美好图景,但展望未来时他转而讨论欧洲科学家"大移民"的聘用效应:

由于我们中间这一卓越群体的存在,一种对我们富有前途的美国青年数学家不断递增的责任感就不可避免地涌现出来。事实上,大多数新进者都拥有研究职位,有时薪资不高,但仍有充足的机会从事自己的研究,也并未负担通常繁重的教学任务。这样一来,可给予美国青年数学家的类似职位的数量必然缩减,随之而来的可能是,他们中的一些将被迫成为"劈柴担水之人"*。我认为我们已经到达了一个饱和点,我们必须在此彻底地避免这种危险。

自 1933 年起,美国数学协会**开始记录"因最近几年的事变而从海外来至美国的数学家"的流入数量。根据《美国数学月刊》征引的数据,1933 至 1937 年这五年间的总数为 45 位。伯克霍夫显然认为这太多了,但是他接着说道:

---

* 该语取自《旧约 · 约书亚记》第 9 章,谓劳苦之人。——译者

** 美国数学协会(MAA)不同于由专业数学家组成的美国数学学会(AMS),它是专注于大学数学教育的团体。——译者

但应予补充的是，方才提及的状况已经突出了一种因素，这与我们普遍注重的我们在数学方面的优势有关。具有远见的大学校长和学院院长们得出结论，若希望提升其任职机构的知识水准，一项非常实际的工作就是增加他们的数学教员。因为，这种做法不会带来实验室和图书馆的巨额花销；此外，数学这一学科正处于一种持续创新的增长状态，相比工程师、科学家而言对社会越来越重要，相比哲学家也一样；而本地和海外的杰出数学家均在资助之列。

伯克霍夫在分析学上的主要兴趣在于动力系统理论，他在此希望扩充庞加莱的工作，特别是在天体力学方面。他职业生涯中最为重要的事件，或许是他证明了庞加莱最后几何定理——限制性三体问题最为重要的一个结论。他的第二大成果是其逐点遍历定理。他还对相对论的基础抱有长久的兴趣，至于量子力学则关注较少，而他在这两个领域建立的物理模型如今只有历史意义。他在诸如初等几何、地图着色、函数空间理论等各类课题上均有论著。他还在其发明的美术数学理论领域广泛撰述。他所有较为重要的出版物都收录在他的著作集之中。包括美国数学学会的博谢奖在内的诸多荣誉在其从业早年便已收入囊中，后来他还获得了许多荣誉学位。

伯克霍夫晚年因心脏衰弱而遭受病痛，但他从未自我放松。1944年11月12日，他在家中睡觉时离世，享年60岁。青年时，他被称作“一台好的混合机车，且动力十足”。二三十岁时，伯克霍夫一家常常大宴宾客，近乎大使级别。据他晚年生活的知情者描述，他那时严谨而保守，倾向于沉浸在自己的想法中。本传略所用照片展现了57岁之时的伯克霍夫。

外尔(1885—1955)

克劳斯·雨果·赫尔曼·外尔(Claus Hugo Hermann Weyl)是他那一代的杰出数学家之一，是其师希尔伯特的一位优秀继承者。外尔的兴趣同样广泛，他对数学基础、数学物理，以及两者之间的许多数学研究领域都有贡献。他还对向一般大众讲解数学予以特别关注。其解说的风格就现代标准而言过于轻松，但却展现出惊人的思想深度，将极为精湛的技巧与非凡的想象力合而为一。



外尔于1885年11月9日出生在汉堡附近的小镇埃尔姆斯霍恩。他的父亲路德维希(Ludwig)在银行工作；他的母亲安娜[Anna，娘家姓迪克(Dieck)]来自于一户富庶人家。从1895年到1904年，他们的儿子赫尔曼在阿尔托纳的文理中学就读，在那里他的表现吸引了校长也是希尔伯特的一位亲属的注意。外尔很快进入格丁根大学学习。很久以后，他曾回忆起自己作为一名年轻的新学生选修希尔伯特课程的经历："因为我那时全然的天真与无知，我冒昧地修读了希尔伯特在那个学期开设的关于数的概念和化圆为方的课程。其大部分内容我都无法理解。但是，通往新世界的门向我打开，而我在希尔伯特的脚边没坐多久，我年轻的心中便形成一个决定——我必须尽一切办法阅读并研习此人所写的东西。"

作为希尔伯特禀赋最好的学生，外尔于1908年取得学位，并作为编外讲师于两年之后留在格丁根大学。1913年，他与海伦妮·约瑟夫

(Helene Joseph)*结婚,她来自梅克伦堡附近的小镇里布尼茨,是一位医师的女儿。在哲学和富于想象而充满诗意的文学方面,她与外尔拥有完全相同的爱好。他们的儿子回忆,当外尔向家人高声朗诵诗歌时,其声音的强度与响度能让屋壁震动。他更偏爱在心底默读这类诗歌,并在他的数学著作中加以引用,以添入一种人文因素。

就在同一年,如此前的诸多杰出德国数学家一样,他被聘为苏黎世联邦理工学院的教授。10 年之后,他拒绝前往格丁根大学接替克莱因的职位,或许是觉得最好在一段时间内应与希尔伯特保持距离。在外尔的早期工作中,希尔伯特的影响无疑是强烈的,例如,他为获得编外讲师资格而作的关于边值问题的论文就是如此。不过,他很快就发展出一系列更富特色的兴趣,将 19 世纪的几何学、分析学与 20 世纪的拓扑学结合在一起。例如,在 1913 年关于黎曼曲面的专著中,外尔给出了一个以拓扑思想阐明复变函数性状的优雅论述。

第一次世界大战爆发后,外尔曾在德国陆军短暂服役,但在那之前,他已经开始致力于一项此后被证明是其最重要思想之一的工作。当观察无理数在单位区间上的分布方式时,他注意到无理数的小数部分与其整数倍是均匀分布的,但对有理数而言却并非如此。这一点发展成为克罗内克-外尔定理。

在这一时期,许多数学家都密切关注在物理学中出现的那些革命性的新思想。外尔就是其中之一,像早先的闵可夫斯基一样,他利用爱因斯坦在苏黎世联邦理工学院的机会与他共事一年。他们合作的成果之一便是外尔 1918 年的专著《时间、空间与物质》(*Time, Space and Matter*)。广义相对论以物质扭曲时空的方式来描述重力,在其早期阶段,一些爱因斯坦思想的最优数学表达尚未明晰。爱因斯坦曾借助于 19 世纪的微分几何学,但他实际并非这

* 作者此处原作 Helen Joseph,似误。——译者

一数学领域的专家。外尔利用张量分析提出了一个比爱因斯坦所得更漂亮的广义相对论的表达。虽然外尔对现代物理学的兴趣更多出于一个数学家而非物理学家的角度，其贡献却超出了改进新物理学的数学表达。例如，他曾关注在宇宙学中以截然不同方式出现的两个不同数字之间的惊人相符。尽管他并不是唯一注意此事之人，但这仍然以外尔假设为世人所知。

第一次世界大战后，外尔对数学基础产生了兴趣，这是当时争议极大的一个领域。在他关于黎曼曲面的著作中，他已经使用了一些布劳威尔的拓扑学成果。如今他正在研究一些布劳威尔关于数学哲学的想法，并确信这些想法必须认真看待。我们知道，希尔伯特很早就对布劳威尔的工作表现出兴趣，却发现无法认同于他。尽管外尔远没有布劳威尔那么教条，但希尔伯特还是因为他支持布劳威尔的观点而感到不安。外尔一贯坚持，若以假定代替构造*，则必有显著性和价值的损失。他如此严肃地秉持这一信念，以至于在他的余生中都小心地避开那些本质上和系统化地利用选择公理的数学理论。

我们之前提及，1920 年布劳威尔曾试图说服外尔离开苏黎世联邦理工学院到阿姆斯特丹大学与他合作，但并未如愿。10 年之后，当希尔伯特从格丁根大学退休时，外尔受邀接任，这次他在几番挣扎后接受了该邀约。一如他返抵格丁根大学后所言："我已然回归，因为我不想与青年失去联系，以致于晚年渐衰而深陷孤寂。因为我意识到知识界是科学发展的真正场所。因此，我将培养科学传统当作一项庄严职责，并最终将自我融入民族共同体之中。"遗憾的是，外尔并无希尔伯特的教学天赋。甚至于他最初级的课程，都远远超出大多数学生可以接受的范围。当轮到他教授初等微积分时，他以一种直观的角度呈现该理论。

回归格丁根大学的熟悉氛围之后，外尔没能享受多久。在纳粹掌

* 此处的"构造"意指对数学基础原理的证明。——译者

权之前，他就已经对德国的科学生活氛围感到不满，并为险恶的政治和经济形势担忧。他研究工作的效率下降了。1933 年驱逐犹太人之后，他曾暂时替代柯朗出任数学研究所的主管，但不久之后便决定不能再留在纳粹统治下的德国。虽然外尔本人并非犹太人，但他的妻子海伦妮至少有部分犹太血统，而这已足够引起当局者的注意。他曾考虑迁往西班牙，却未能成行。

1928—1929 年，外尔曾利用休假离开苏黎世联邦理工学院来到普林斯顿大学。1933 年初，他便打探在新设的普林斯顿高等研究院内谋求职位的可能性，并很快获得一份邀约。外尔与他的妻子日复一日地商量是否接受此聘。两份电报的草稿置于他的台前，一份接受邀约，另一份是拒绝，但到最后，他决定不去。柯朗向维布伦解释说："外尔的行为确实极端怪异而复杂难解。唯一可以理解的是，如果有人认识到外尔虽才华横溢却实际上是一个内心缺乏安全感的人，那么对他来说，没有比做出一个将会影响他整个人生的决定更难的事，他在精神上不能承受这种决定的负担，而必须从他处获得有力支撑。"不过，这一年的晚些时候，外尔改变了他留在德国的想法，并想知道那份来自普林斯顿的邀约是否仍然有效；邀约有效，这次他接受了。他精疲力尽地来到美国。

作为研究院的固定成员，外尔在一个理想的环境中继续其研究，虽然在普林斯顿的岁月不如其正处能力高峰时在苏黎世的十年间（1917—1927）那样成果丰富。他的后期研究多在纯粹数学方面，但他在数学物理上的兴趣依然浓厚。早在 1929 年，他已为称作中微子的亚原子粒子构建出一套数学理论。该理论内在相容，但因未能保持左右对称而被抛弃了。然而，随后的实验揭示，事实上并不需要保持对称性，这使得外尔的理论重回主流。关于旋量——一种在量子力学显示出巨大作用的张量——的研究，是另一个数学与物理学的交叉领域。虽然嘉当等人已先行考虑过旋量，但外尔首次对它们的性质给出系统描述。

物理理论的目标之一，是在变动的情形中寻找保持不变的量。外尔修正了克莱因的构想以适应于现代物理学，并在相对论和量子力学中刻画了这些不变量的特征。他 1928 年题为《群论和量子力学》(*Group Theory and Quantum Mechanics*)的著作陈述了其观点，并收集汇总了此前物理学家们所得的各种不同结果。

外尔对数学史也很感兴趣，这可以从他对该学科 20 世纪上半叶发展的考察中看出，该文发表于 1951 年的《美国数学月刊》，而那年他正从高等研究院退休。虽然其英语从未能像德语那样流利，外尔还是非常注重文学和风格的问题，这也能解释其说明性著作成功的原因。他一直就公众对科学发展的知情权保有一份强烈的责任感。

外尔的第一任妻子海伦妮是一位翻译家，她将包括加塞特(Ortega y Gasset)的论著在内的诸多西班牙语作品译成德文。在她 1948 年去世的两年后，外尔与来自苏黎世的艾伦·洛恩斯泰恩(Ellen Baer Lohnstein)结婚。每年他们都有一半时间在她的家乡度过。外尔没有意识到，美国有一条管制归化入籍公民不丧失国籍而能在外居留的时长的法令：他无意中超过了时限，遂被中止美国公民身份。恢复公民身份需要一项国会特别法案。

正是在苏黎世，外尔 1955 年 11 月庆祝了他的 70 岁生日。他人生中最后一次公开活动，是他出席其论著的一卷《选集》(*Selecta*)的发布。其后，当他寄送一些对祝贺的感谢信时，他心脏病发作，于 1955 年 12 月 9 日亡故。他的离世，让世界失去了与伟大的格丁根数学时代相关联的最后几人之一，一位卓越的数学家，一位当代物理学奠基人，和一位最优秀的诠释者。

波利亚(1887—1985)

虽然与奥匈帝国的哈布斯堡王室密切相关，中欧却更像是一种理念；这个理念无法完全以地图的形式展现。中欧代表着城市化、文化、

才智、种族混杂(主要是在日耳曼人、斯拉夫人和匈牙利人之间)和使用双语(德语是通用语言)。中欧主要是一种文化现象;虽然很多犹太人也在此居住,但宗教主要是天主教和新教的混合并存。维也纳是中枢,但是其他城市,例如布雷斯劳、布达佩斯、克拉科夫和布拉格也非常重要。



对匈牙利数学家来说,19 世纪末到至少 20 世纪中叶是一段黄金时期。在第一次世界战之前,当奥地利与匈牙利组成二元君主制国家时,奥地利一方似乎更加令人印象深刻,但是当我们盘点匈牙利数学家时,匈牙利一方开始变得同等重要,在某些程度上甚至更加重要,例如里斯(Riesz)兄弟、费耶尔(Fejér)、哈尔(Haar)、拉多(Radó)、塞格(Szegö)、冯·凯雷克亚尔托(Von Kerékjártó)、冯·诺伊曼、冯·卡尔曼(Von Kármán)、埃尔代伊(Erdélyi)、埃尔德什等,所做出的贡献都非常突出,与他们完全不同的是乔治·波利亚(George Pólya)。

哲尔吉(乔治)·波利亚[György(George)Pólya]于 1887 年 12 月 13 日出生于布达佩斯。他的犹太人父亲雅各布(Jakab)在一家保险公司做律师,并且在大学就职,他的母亲安娜[Anna,娘家姓多伊奇(Deutsch)]具有上等的社会地位。这对夫妇有六个孩子,其中一个在出生不久后便夭折了。大儿子成为了一名出色的外科医生,但他在第二次世界大战末期被纳粹杀害;最小的那个同样极具天赋的孩子,则在第一次世界大战中丧生。剩下的孩子中有也在保险公司就职的两个女儿,以及我们简称为波利亚的未来数学家。

波利亚就读的当地高中提供了很好的基础教育,但在数学方面却不太出色。在大学里,尝试了法律专业后,他花了两年时间学习语言学。后来他又尝试了其他学科;他对哲学不感兴趣,觉得物理学困难重

重,最后他勉为其难地选择了数学。那时大学里最出名的数学家是费耶尔,他在31岁时便已经成为了正教授。波利亚似乎把他作为自己的榜样,他是这样描述的:"他拥有艺术品位。他热爱音乐,并且是一位很好的钢琴家……他精心培养着自己说故事的天赋;当他以自己特有的小手势讲故事时,他令人无法抗拒,虽然作为一位伟大数学家这算是小缺点。在欧洲大陆的咖啡馆与费耶尔讨论数学问题和讲故事的时光,对我们中的许多人来说都是珍贵的回忆。费耶尔在对数学进行讲解时带入了他讲故事时一样的活力,这使得许多年轻人在他的研究领域保持了长久的兴趣。"

1911年波利亚在维也纳大学度过了一年的时光,也享受到了数学黄金时代所带来的好处。这里纯粹数学的领袖是几何学家维廷格(Wilhelm Wirtinger),作为克莱因的密友,他招收了一些很有潜质的年轻人。但是在二元君主制的两个首都之间,氛围却有天壤之别。维也纳是政府所在地,反犹太主义也非常明显。波利亚在那里生活得并不愉快,他最终还是回到了布达佩斯,并在那里获得博士学位。

在那个时代,除了巴黎有潜在竞争力外,格丁根大学在数学上拥有无与伦比的领先地位。波利亚准备在格丁根大学待上两年时间。希尔伯特是他的导师,波利亚有幸聆听他关于偏微分方程、物理学的数学基础及基础数学的讲座。他也听过特普利茨关于不变量理论、卡拉泰奥多里关于变分法、赫克(Hecke)关于代数数域的讲课。他听过在那个时候只是一个编外讲师的外尔关于积分方程及其在数学物理领域中的运用的讲座。他听过兰道关于无穷级数,尤其是傅里叶级数的讲座。兰道还开设了关于数学问题的课程,这个数学领域不久就变成了波利亚的专业。而且他还与刚刚退休的克莱因有过讨论。在以后的岁月里,他经常回忆起在格丁根大学的经历,说不定本来他可以在那里成为一名编外讲师。但是在某个假期他坐火车回到格丁根大学,当他把手提箱放到行李架上时,手提箱掉落撞到了一个德国乘客,这个乘客是大

学生,也是一位枢密顾问的儿子。他们脾气暴发,甚至讨论到了决斗。当大学当局察觉到此事时,波利亚被勒令离开,就这样,他在1914年年初去了巴黎。

虽然失去了庞加莱,但当时巴黎数学界名人的聚集程度一点不比格丁根大学差,尽管那里更加拘谨一些。波利亚聆听了诸如博雷尔、嘉当、弗雷歇、勒贝格和皮卡等名人的讲座。他发现很多著名教授都威严十足,但也有平易近人者如法兰西学院的阿达马,而波利亚得以参加他著名的研讨会。虽然他在这座城市待了不到一年,但是已经足够让他的法语变得流利,并且和一些法国数学家建立起了长久的友谊。遗憾的是他太穷了,以至于没有享受巴黎奢侈的生活。

当波利亚接到苏黎世联邦理工学院编外讲师职位邀请时,他迫不及待地接受了它。他已经考虑要回到布达佩斯,但苏黎世更加适合他。理由之一是,这意味着他可以结识赫尔维茨,一位被希尔伯特称为他真正的老师和导师的数学家。传统的赫尔维茨与波西米亚裔的费耶尔截然不同:尽管他们的数学风格相似,但赫尔维茨拥有更广博的涉猎。他在主攻函数论的同时对代数和数论也充满兴趣。波利亚和他交好,他后来写道:"从我1914年就职以来直到他去世,我和他保持着紧密的联系。我们有特殊的工作方式。我会登门拜访,然后我们会坐在他的书房讨论数学问题——极少涉及其他——直到他抽完自己的雪茄。之后我们会出去走走,继续我们的数学讨论。他的健康状况不是很好,所以我们都是在平地上散步,这在山地的苏黎世不是那么容易做到,于是当我们上坡时,我们走得非常缓慢……我与赫尔维茨联系较多,所以我对他的情谊比任何其他的同事要深。"

赫尔维茨去世之后,波利亚担负起编纂他著作集的重任。他开始考虑回到德国,当法兰克福大学的职位空出来时他即去申请。法兰克福大学收到了外尔的推荐信,值得在此引用:

首先来说说波利亚。他研究数学的方式对我来说完全是陌生

的。比起对知识的关心，他更在乎对快乐的搜寻。但是我敬佩他的才华。他的理念并不聚焦在知识的主要关系上。他的论文非常简单，向着某个未知的、仍属黑暗领域的一些十分特定的目标大胆推进。但他的问题非同寻常。他充满疑问，在数学圈子里是一个非常有刺激性的人。作为一个教育者，他可能在某种程度上会被对研究精益求精的态度所阻碍；但是他用一种可称之为“真诚的友谊”的方式来关心他的学生。就应用数学而言，他在概率论方面造诣颇深，在这个领域也有论著发表。他在应用学科（物理学、统计学等等）方面的知识也很丰富。

波利亚非常担心，作为犹太人，他的任期会被魏玛当局阻碍，但反对的主因显然是他对左翼思想所保持的同情。

在来到苏黎世前后的这段时间，波利亚趁着造访布达佩斯的机会见到了他的同胞塞格。塞格比波利亚小七岁，1918 年在维也纳获得博士学位之后便去从军。塞格先后在柏林大学和柯尼斯堡大学做编外讲师，并于 1926 年在后者获得教授头衔。他一直待在那里直到 8 年后纳粹驱逐了犹太籍的教授。他之后移民到了美国，最早到圣路易斯的华盛顿大学，之后在 1938 年去了斯坦福大学。波利亚和塞格在发现和解决问题中分享了各自的兴趣点，并在 1925 年完成了经典的两卷本《分析学中的问题和定理》（*Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*）。这本书众所周知，一个数学工作者肯花时间研究波利亚和塞格的问题的话会受益匪浅，但是比起收集问题来说，作者写作这本书有更重要的意义。他们在序言中写道：

这本书的主要目的，我们相信是有现实意义的，是让研究数学的高等级学生在一些重要的分析领域习惯于通过系统性的方式研究问题，以得到独立的思考与研究问题的方式。其目的是服务于需要独立研究的学生和老师。这本书可以让学生扩展自己的阅读和讲座材料，或者

可以相当独立地完成这本书的部分精选内容。导师们可以用它来编写教程或讲座的大纲。

这本书不仅仅是问题集。它最重要的功能是对材料进行系统性的梳理以激励读者独立工作,为他们的思路提供有益的建议。比起猛一眼看来的草率之作,这本书其实是我们投入更多的时间、精力和细致的努力,所写出的最精确的演示材料。而传授知识则是次要的考虑因素。总的来说,我们旨在向读者推广一种正确的态度,一种对思维的训练,这对数学来说比其他学科更重要。

1924 年哈代邀请波利亚到牛津大学工作一年;最后剑桥大学也纳入了行程。那时哈代和李特尔伍德都在试图对声名狼藉的剑桥大学荣誉学位考试进行深度改革。他们让波利亚在那一年参加考试,猜想他不会在这种人工干预过多的问题上取得成功,并且以像他这样优秀的外国数学家都无法在荣誉学位考试中获得很好的成绩为由,来大大促进他们的改革。但当波利亚取得比其他普通候选人都出色的成绩时,他们着实感到困扰。无论如何,访学很成功,哈代和波利亚成为了挚友。他们合写了很多论文,但最出名的是他们和李特尔伍德在 1934 年合写的著作《不等式》(*Inequalities*)。波利亚与拉马努金的相遇有些为时过晚,但是他仍成为对那个著名的笔记本中的公式着迷的诸人之一。

后来,当波利亚申请晋升时,哈代为他写了一封推荐信,包括以下评价:

不论是在数学造诣还是为人方面,我对波利亚都有相当高的评价,当他留在这里时这种感觉更加强烈。我也觉得很可能还没有见过他最好的一面。他也许在最近几年有点气馁,当然职位上的晋升能让他获得激励并更好地工作。他似乎没有闲暇时间,他不敢在可能无所作为的难题上浪费任何时间。当然,当一个优秀的数学家开始

有这样想法的时候,通常会存在很大风险,他无法正确运用自己真正的能力。

1928年波利亚被任命为苏黎世联邦理工学院的正教授,不久成为了瑞士公民。这时他已经结婚十年了。他的妻子斯特拉(Stella)是纳沙泰尔大学的物理学教授之女。波利亚感觉到工作量超负荷,她担心这会影响他的健康。他在瑞士阿尔卑斯山的恩格贝里获得了一个农舍,20世纪30年代他们在那里款待友人。虽然波利亚去过很多地方,但是他害怕返回匈牙利,因为第一次世界大战时他没有参军,部分原因是体检不过关,但主要是因为他的和平主义观点。他接受了很多请他做访问学者的邀请,包括1929年的巴黎大学以及三年之后的格丁根大学,正好赶上黄金时代的末班车。但结果表明,最有价值的邀请是1933年在美国度过的半年时光,三个月在普林斯顿大学,三个月在斯坦福大学。在美国期间,他见到了自己以前的学生冯·诺伊曼,也认识了很多新朋友,尤其是伯克霍夫和维布伦。

20世纪30年代末,当欧洲再次卷入战争之时,有传言说德国即将入侵瑞士,这对于犹太人来说后果将是灾难性的。到1940年,他觉得无论如何自己在苏黎世待的时间已经够长了。当势态发展时,他收到斯坦福大学一年的邀请和布朗大学两年的邀请,波利亚选择了后者,但他希望找到更加稳定的归宿。当斯坦福大学提供给他一份副教授教职时,这一想法成真了。波利亚是幸运的,甚至于对那些极具雇佣价值的欧洲移民来说,要在美国找到满意的职位也越发艰难。他在1947年获得美国国籍。

这时塞格已经在斯坦福大学工作了很多年,作为数学系主任,他正在建立一个一流的院系。波利亚在早先的几年间没有发表任何著作,但是他定居帕洛阿尔托后,便进入了另一个多产时期。他与塞格的合作重新开始。然而他后几年的兴趣并不在研究方面。波利亚总是对解

题技巧，特别是启发式方法有着强烈的兴趣，当时他写了一本关于这方面的书，书名叫《怎样解题》(*How to Solve it*)。他在寻找出版商时遭遇了一些困难，但当1945年该书出版时，取得了空前的成功。1953年从斯坦福大学退休之后，他遵照大众的兴趣，续写了两本书：1954年出版的《数学与猜想》(*Mathematics and Plausible Reasoning*)，以及分别于1962年和1964年出版的两卷本《数学的发现》(*Mathematical Discovery*)。

此时的波利亚已经70余岁，但仍旧精力旺盛。他仍然考虑成为一名兼职教师，1955年他开始为高中和高校教师开设的暑期讲座，他在每个活动中都异常活跃，是真正的主角。他总是尽量用直观教具来展示。他的整个方法与严格的“新数学”的推动者相反。

波利亚获得的荣誉相对来说有些晚，大概是因为他与学院派数学家的标准相去甚远。1947年，他当选为巴黎科学院的通讯院士。在获得的其他身份中，他在1976年快90岁时，获得了华盛顿科学院院士的荣誉，很多人觉得这份荣誉来得太迟。1985年9月7日，在97岁时，波利亚因为中风，在帕洛阿尔托去世。他作品集的序言总结了他独特的数学风格：“他所有的作品散发出快乐的个性、美妙的味道、一目了然的方法论、简单的手段和有效的结果。”

拉马努金(1887—1920)

斯里尼瓦瑟・艾扬格・拉马努金(Srinivasa Iyengar Ramanujan)于1887年12月22日出生于其母亲的家乡埃罗德，在印度马德拉斯省坦焦尔区的贡伯戈纳姆长大。这个家族是正统的婆罗门，但非常贫困。他的父亲在一个织布商的企业中做帐房。他的母亲是一个精明、有教养、非常虔诚的妇女，经常和一群人在当地的寺庙中唱赞歌以贴补家用。她本身有着数学方面的才能，并且相信自己儿子的超强能力是与生俱来的。拉马努金早期在贡伯戈纳姆接受教育，并在小学阶段学习了英语，接着去镇里接受了中学教育，那里的授课是全英文的。他的数

学天赋很早就显露出来；在11岁时他便用一些无法总是回答出来的问题来挑战数学老师。看到他在这个领域中的兴趣，一些大学生借书给他看。拉马努金13岁时便掌握了比自己大很多的学生学习的通俗三角函数教材。1904年他从中学毕业，获得了在数学上的特殊奖项，并得到了进入大学的奖学金。



在这之前，拉马努金已经阅读过一本19世纪80年代由英国数学家写作，题为《纯粹和应用数学基本结论纲要》(*A Synopsis of Elementary Results in Pure and Applied Mathematics*)的书。书中没有过多的具体介绍，而是罗列了数千条结论、公式和等式。对于拉马努金来说，这引发了他对数学压倒性的热情，使得他不再研究其他科目。当他开始出现不及格时，他的奖学金被取消了。他证明了一些没有记载的结论，其中很多都有原创性。他把那些认为比较有趣的东西告诉别人，并记录在笔记中。

因为没有大学学位，拉马努金很难找到合适的工作，在很长时间里他总是一贫如洗，常常接受朋友和家人的资助。他有时会指导学生学习数学，但是没有取得很大成果，因为他未按照教学大纲和标准的方式来做。1909年他和一个比自己小10岁名叫加纳基(Janaki)的女孩结婚。这之后，他来到南印度的首府马德拉斯谋求生计，最终一位叫拉奥(Rao)的总统学院数学教授因对拉马努金的研究成果印象深刻，给他提供了暂时的资金支持。之后他讲述了这时出现在他面前的拉马努金：

矮个子，形象猥琐，身体结实，胡子拉碴，不是很干净，有一个很明显的特征：害羞的眼神，走路时腋下总是夹着一本破旧的笔记本。他非常不幸地遭受着贫困。他从贡伯戈纳姆来到马德拉斯工作以维

持学习开支。他从不渴望任何荣誉。他只想工作；换句话说，我们应该无偿地提供他帮助，而且要允许他的梦想存在。他翻开笔记本开始解释他的发现。有时候我觉得这些发现偏离了正轨；但是我现有的知识使我无法判断出他所说的是有意义的还是没有意义的。我悬置起自己的不解让他再说一遍，他照做了。他发现了我的无知后告诉了我一些他的简单结论。这些超越现存书籍的东西使我毫不怀疑他是一个非凡的人。然后，一步一步，他和我谈了椭圆积分、超几何级数，最后他那还没有向世界宣布的发散级数理论使我完全转变了。我问他想要什么。他说想要一点微薄的生活费以支持他的研究。

1912 年拉马努金终于得到了马德拉斯港的一个会计文员职务，获得了微薄的工资。同时他在数学上的研究工作得到了其他学者的关注，他们认可了他的才干，并鼓励他继续研究。他贡献的第一个文献是题为《关于伯努利数的一些性质》(Some properties of Bernoulli's numbers)的论文，发表在 1910 年的《印度数学学会杂志》(*Journal of the Indian Mathematical Society*)上。他与许多数学家的交流随即开始。

1913 年，拉马努金开始给剑桥大学的顶尖数学家写信阐述他的发现。前两封都没有回信，但是哈代回复了他的第三封信。在给哈代的信中，拉马努金在一段简要的自我介绍后，直接跳到了公式和定理。哈代的第一反应是对这种急急忙忙的做法很不以为然，认为信中充斥着粗糙的结论和野蛮的定理，没有任何证明加以支持。但是这封信中的某些东西，也许是太不可思议了，激起了哈代的好奇心，他决定邀请李特尔伍德和他一块仔细看看。在 3 个小时的精读之后，两人决定和这个天才打打交道。哈代给拉马努金写了回信，要求得到一些证明过程，但拉马努金要么不能，要么不愿意提供给他们。当他再次写信时提供了更多的结论，但仍然没有证明。哈代是重新把魏尔斯特拉斯严格的论证方法引入英国学校的分析领域的人，直观推理的拉马努金不是很让他满意，但显然拉马努金也不愿意心甘情愿地把自己的秘密暴露在

陌生人面前。

在咨询李特尔伍德后，哈代决定邀请拉马努金到剑桥大学来。但作为一名婆罗门，拉马努金坚持其宗教思想，而且马德拉斯大学也提供给他2年的奖学金作为备选方案。哈代很失望，但是坚持说服拉马努金来剑桥大学。他的同事内维尔（E. H. Neville）在1914年访问了马德拉斯大学，在他的帮助下最后终于说服了拉马努金。在离开印度之前，拉马努金被告之说需要穿西方的服饰，遵从另一套礼节，这些完全错误的建议使他非常不快。在剑桥大学，拉马努金在哈代和李特尔伍德（尤其是哈代）的指导下，迅速成长起来。但是他发现大学校园的生活存在问题。“我来这里以后感觉不是很舒服，而且经常在想为什么我要到这里来，”他来后不久就写道，“这里很难找到合适的食物。”拉马努金对食物很在意，因为宗教的关系，他坚持自己做饭。这是主要的问题，但也有其他的，比如他抱怨床上太冷，直到他得到建议尝试睡在床罩下面而不是上面。

从印度来剑桥大学的访问学者们都来和他会面。他们对他的神秘印象深刻。其中一个访问学者留下了对他的描述：

深色的皮肤，有些斑点的脸庞，他那梦幻般的眼神心不在焉地看着他们，中等身材，身体比较结实——这就是拉马努金，杰出的数学家。他的房间在剑桥大学三一学院的外院，就像居住在里面的人一样，显得不甚庄重……甚至获得特许站在他旁边的短暂时间里，我也常常听到造访他的人都惊讶于这个其貌不扬的天才和他零散的书架。“你就是那个著名的数学家吗？”这时他总是自然地将身体蜷缩到凳子里去。但是当访客离开时，拉马努金常常问我，“你能尝试着恰当地回复这个问题，并描述在回复时可以采用的戏剧性姿势吗？”

拉马努金拥有非常敏感的性格。即使在离开印度之前，他便以突然“失踪”而闻名。有一次，在1916年，他在自己剑桥大学的寓所款待

一些印度来的朋友。他对自己的厨艺非常骄傲。他的客人们尝试过很多种他准备的南印度食物,在他们表达赞许之前,他准备了更多的。当女士们委婉表达拒绝时,他一声不吭地起身,叫了一部出租车,然后躲到牛津大学消失了将近一个礼拜,他感觉自己被侮辱了。

不可避免的是,在拉马努金的笔记本中有很大比例的结论是由重新发现所构成的;他从未经历过任何的系统培训或进过好的图书馆。引用哈代的话来说:"他是如何学会现代数学的呢?他研究中的局限和深奥一样令人惊讶。他研究椭圆模函数,但是对双周期性一无所知;他研究解析数论,但是对复分析只有模糊的概念。他笔记本中的许多结论都没有证明,只是看起来貌似正确。他构建数学证明的理论只是模糊的描述。"

在拉马努金的所有发现中,关于自然数的分拆最为出名。他推测,就小素数和它们的幂而言,分拆函数必定具有简单的同余性质,他在一些例子中用椭圆函数证明了它。在英国的五年间,拉马努金发表了21篇论文,包括一些与哈代的合著。或许其中最引人注目的是关于分拆函数渐近值的一个如此完美的表达式,因为该函数一定是整数值,其值是很精确地被确定的。

1917年春天,拉马努金得了重病,被作为肺结核病治疗了几个月。现在认为他当时是得了肝阿米巴病。很遗憾的是疗养院地处偏远,这意味着他将和朋友切断联系,接受简朴的食疗,最重要的是缺乏他可接受的食物,这让他深感沮丧。即便如此,根据内维尔的描述,他从未对来英国的成就产生过质疑。同时,哈代在李特尔伍德的支持下,竭尽所能地让拉马努金的才华得到认可,包括1918年让他入选英国皇家学会,并成为三一学院研究员。不久之后,考虑到他的健康状况,他被安排回到了印度,去申请马德拉斯大学的教授职位。1919年他返回马德拉斯,很快拿到了教授职位,但是那时他的健康已经非常糟糕了。他拒绝治疗,于1920年4月26日在马德拉斯附近的切特普德逝世,享年32岁。直到弥留之际,他仍然保持着对数学的钻研热情,甚至在病榻之上

也创造出很多新的结论。

内维尔对拉马努金非常了解,把他的性格概括为:"处事既完美又简单,会因为怕麻烦而放弃,而名声未受破坏,对错误感恩,富于献身精神。拉马努金是一个杰出的数学家,是一个可爱的人。"哈代说:"我亏欠他的比世界上任何一个人都多,在我的生活中,和他共事是件浪漫的事情。"但拉马努金数学才能的来源是个谜。看上去超群的记忆力发挥着很大的作用,但是确切说来,他看过哪些书,以及从中学到过什么都是未知的,没有人问过他。拉马努金将他的才能归功于家族的神——女神纳马格瑞(Namagiri)。拉马努金是一个有很深宗教信仰的人,他将热情与信仰联系在一起,有一次他告诉朋友说:"一个方程对我来说没有任何意义,除非它体现了神的意志"。

柯朗(1888—1972)

我们这一个主角实现了克莱因在格丁根大学建立一所数学研究所的愿景,当纳粹让一切毁灭后,他在美国重新起步,并且成功地在纽约建立了相似的研究所。像他之前的米塔-列夫勒、克莱因和维布伦一样,他是一类数学家的典型,虽以一名教师和研究者闻名,但是他的领导力、影响力和组织能力更加突出,使事情总能顺利完成。

理查德·柯朗(Richard Courant)于1888年1月8日*出生于德国上西里西亚区的小镇卢布林茨(现属波兰)。他的父母西格蒙德(Siegmund)和玛莎(Martha)住在西格蒙德父亲的房子里,与其家族的几位其他成员共居。家中的次子弗里茨(Fritz)在第二年出生,两年之后三子恩斯特(Ernst)出生。那时西格蒙德离开了他早年参与的家族生意,并将自己的一份产业带到附近的小镇格拉茨。全家人开始时搬到格拉茨,之后又于1895年搬到了省城布雷斯劳。在这里,未来的数学家进

* 原著误为1887年2月17日,在此更正。——译者



入当地的文理中学，此前他已在格拉茨开始上学。但是与西格蒙德仍旧牵连的家族生意发生了经营困难，西格蒙德申请了破产。从那时起，柯朗的父母陷入了贫困之中，他仍在学校时就不得不开始以做私人教师的方式赚钱。他干得不错，当他的父母搬到柏林时，他留在了布雷斯劳。

柯朗年纪轻轻就开始在大学里听课，他中学一毕业就成为正式的大学学生。他开始时打算研究物理学，但当他发现该学科教学老旧且质量欠佳时，他转向了数学。即便如此，他仍然觉得教学很无趣，在咨询了一个当时已经是格丁根大学编外讲师的前辈学生特普利茨后，他转到了那里。不过他先花了一个学期在苏黎世大学聆听赫尔维茨的讲座，希尔伯特曾在那里受益匪浅。1907 年，柯朗来到格丁根大学，很快就被希尔伯特迷住了。

虽然格丁根往往被描述成一个悠闲的小镇，一首中世纪的诗歌，美丽动人，但它却被当地的工业严重污染。这样的生存环境对于柯朗这样的穷学生来讲没有任何田园风情。房间里杂乱无章，缺乏食物和清洗设备。“我们在莱讷河里洗澡——这是唯一有效的洗浴方式，顺便说一下，莱讷河不是非常干净”，一个学生写道。开始时柯朗感到很孤单，对讲课质量非常失望。当希尔伯特同意接收他进入自己关于数学物理的研讨班时，情况发生了变化。这意味着他必须就指定的题目发表演讲，他的题目是关于静电和相关的电磁理论现象。柯朗最初的尝试并不成功，但是至少让他注意到了这些问题。第二周当他再次尝试之时，他的演讲被广泛接受，从此以后他感觉就像在自己家里一样。希尔伯特邀请他参加数学学会每周的聚会，但这都是克莱因所反对的。

柯朗眼下的最大心愿是成为希尔伯特的私人助理，虽然地位卑微，但是能与导师亲密接触的特权是很有吸引力的，与他及闵可夫斯基结

伴在格丁根的树林里散步时，他们谈论的不仅仅是数学，还有很多哲学、社会和政治问题。当这个位置在1908年空出来时，对于这个特权的竞争非常激烈，柯朗很高兴被选中。他后来说："这是我最大的幸运"。希尔伯特这时所开设的课程是关于分析学，他希望柯朗研究课程的参考书，然后做一些笔记。

柯朗的博士论文题目叫《论狄利克雷原理在保形映射问题上的应用》（On the applications of Dirichlet's principle to the problems of conformal mapping）。遗憾的是，所有与单值化相关的工作，都趋于被克贝承接了，他以借别人的想法帮助自己而出名。这在柯朗这里也出现了，但至少没有让他丢掉学位。克贝离开格丁根大学，在其他地方获得了教授头衔，同时柯朗也开始准备服兵役了。让他感到惊讶的是，柯朗发现军队生活很合他的口味。一年后他回到格丁根大学，尽管有马尔堡大学充满吸引力的邀约，他还是在1912年于格丁根大学完成了关于变分法的论文，特别是关于有争议的狄利克雷原理（的论述），并获得了大学的任教资格。很快他和一个数学家同行内莉·诺伊曼（Nelly Neumann）结婚，她比柯朗大两岁，家境富裕，结束了他经济上的担忧。

第一次世界大战爆发时，柯朗又回到了军队。像许多其他的年轻人一样，他热情地服役，并期望战争很快以德国的胜利而告终。12个月之后，他在一次战斗中受伤，康复期间，他的妻子来看望他时表达了离婚的意愿。几个月之后他再次服役，这次不是在步兵团，而是致力于一项借助地面电报的战地通讯系统，它最终被军队所接管。他的弟弟恩斯特在一次行动中被杀死。

离婚之后，柯朗又爱上了内里娜·朗格（Nerina Runge），通常被叫做尼娜（Nina），他们在1919年1月22日结婚。尼娜来自一个著名的学术之家，她的父亲是德国大学聘任的第一位应用数学教授，在他们结婚时正担任格丁根大学的校长。开始时，格丁根大学的人们都不赞成这场婚姻，因为柯朗是犹太人，又离过婚；据说他已经厌倦了相貌平庸的内莉，使得他失去了进取心。第二段婚姻被证明是成功的，虽然柯朗

在他的一生之中时常沉迷于女色。

战后的格丁根大学挤满了学生和从战场上回来的人,此时已经是编外讲师的柯朗坚持着自己的工作。在克莱因的建议下,他参选市议会的议员并成功当选。柯朗总是对政治很感兴趣,特别是当它们影响到自然科学和大学时。他对科学出版也充满兴趣,并坚持科学的发展不仅仅表现在专业期刊的论文发表上,而且也体现在独立的专著和结合广泛调查与作者研究的高级教科书上。甚至在战争结束之前,他就为一套重在加强与物理学联系的数学丛书联系了施普林格出版社。此丛书具体呈现为著名的《数学科学原理》(*Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*),柯朗为之编纂了很多年。

当1913年克莱因退休之时,他的教席最初被卡拉泰奥多里所继承,接着又是赫克,但赫克在1919年去了汉堡大学。这时,格丁根大学的教席又一次空缺出来,克莱因和希尔伯特都希望柯朗能接任。但是教育部长不同意内部升迁这种形式,柯朗被安置在附近的明斯特大学以接替基灵,等到时机成熟再返回格丁根大学。事实上这件事一年不到就实现了,虽然克莱因年老力衰,但是他仍然能够让事情顺利进行。

柯朗很快从克莱因处接手"数学部署"这项工作。他的出山不仅吸引了格丁根大学的杰出青年才俊,例如阿廷和西格尔(Carl Ludwig Siegel),而且也对很多离开到别处任职的人充满吸引力。当时在苏黎世大学的外尔被认为是首选,到了1918年,当教授的职位空出来时,柯朗想让外尔来就职,但是没有成功。不过四年之后柯朗争取到一个附加的数学讲席,给了外尔。这时通货膨胀席卷德国,政治形势变得扑朔迷离,所以外尔变得犹豫不定。在迟疑了很久之后,他接受了电报局的工作,但当他到那儿时,又改变心意提出辞职。

当德国深陷经济和政治动乱之时,柯朗正经历着他学术生涯的多产时期。虽然他计划和希尔伯特进行一次合作,但第一次合作仍然是与赫尔维茨。确切地说,赫尔维茨在1919年底去世,但柯朗虽然觉得赫尔维茨的演讲太过精致,以至于不能真正起到启发的作用,但仍强烈

地认为它们应该为更多的听众所获取,而不仅仅只提供给苏黎世大学的学生。这些有关函数论的讲座,秉承着魏尔斯特拉斯的精神:它们直截了当,用词精确,以清晰和悦目的特征而著称。柯朗虽然欣赏它们,但他觉得需要用黎曼几何的方法去平衡它们,后者是几何的而不是分析的,是直觉性的而不是不证自明的。所以他加入了一个章节,灵感更多来自于物理学而不是纯粹数学的思想。一个读者说,"它给人的印象是一种具有精巧直觉能力的心智的作品,但缺乏训练和可获得自信的批判意识",但另一个人却把它描述成自己所读过的作品中最让人难忘的。

接下来柯朗完成了《数学物理方法》(*Methods of Mathematical Physics*),这本书是他在1918年和希尔伯特合著的,收录于《数学科学原理》,它们以"柯朗和希尔伯特丛书"而闻名。当希尔伯特对他的前学生的著作产生兴趣时,他并未积极参与;他的兴趣最终从物理学转移到数学基础之上。这些数学方法来源于像弹性、声学、流体力学这样的物理学领域,以及其他古典学科。在数学家手里,这些植根于物理直觉的方法,被普遍的理论改造成了严格的工具。这是建立在柯朗自己的调查研究中,同时也出现在希尔伯特的演讲中。

柯朗的目的是把这些高级的工具归还到物理学家手中,让他们在工作中使用。但在最初发表时,这本书好像对数学家的吸引力超过了物理学家。1924年,比起那些尝试理解量子力学的人来说,物理学家们所做的事情已经过时了。应用数学被定义为"那些已经不被物理学家们所感兴趣的物理学领域"。但是柯朗坚信这本书对物理学家和对数学家同样重要,他很快被证明是对的。当关于波动力学的薛定谔理论在1926年出现之时,柯朗和希尔伯特的理论被证明正是新理论所需的简便数学方法。柯朗同时也是很多书的作者或合著者,"柯朗和希尔伯特丛书"是他的杰作。

柯朗也热衷于做一些改善教育方法的事情。在那个时期,格丁根大学和其他德国大学的教学体系是教授讲课、学生记笔记,或是单纯地

聆听。教科书很少被使用,没有考试甚至是小测验,直到多年之后,学生才会面临针对教师的国家考试或者针对博士生的大学考试。柯朗引入了“初学者见习期”,和讲授课程相互衔接。数以百计的学生将会拿到题目的复印稿件,有些题目需要对讲课材料有深入理解,并且提出创新性的思维。接下来教授将会开设和一些高年级学生一起座谈的课程,讨论问题并指出不同方法之间的冲突。高年级的学生将会和初学者们一起练习,同时他们会熟悉彼此。答案出来后给予评分。学生之间的合作也被鼓励。这类课程完全自愿参加。柯朗所做的看起来并不是革命性的,但是在训练学生方面却有了显著的提升。

柯朗认为,格丁根大学教学与研究相结合的数学-物理学传统几乎完全是克莱因的个人创造,他的声望仅次于希尔伯特。克莱因在格丁根大学待了足够长的时间,目睹了它在第一次世界大战后恢复其数学界“麦加”的地位,但是当他去世时,他创立一个研究所的计划似乎难以达成。不过在他去世后的几个月,一个意想不到的机会来临了,市政当局计划将一所中学从它离物理研究所很近的原址搬到新地点。如果大学愿意提供地点的话,政府将很乐意兴建一所新的研究所。直到大学筹到钱去建造一所新的学校,市政当局才让它接管上述空出来的旧址。此时,柯朗决定接洽洛克菲勒基金会,它曾经资助过庞加莱在巴黎的研究机构。他和纽约取得了联系,因为抓住一切机会去笼络将来某一天会对他有用的人是他的工作。不久之后,他听说一笔庞大的资金被核准,与其他来源的资金汇集在一起,使得该项目得以顺利开展,这仅仅在克莱因去世后18个月。新研究所在1929年12月2日正式举行落成典礼。柯朗谦虚地将这一切归功于克莱因和希尔伯特,但人们都清楚,没有柯朗,这一切都不可能发生。

在新研究所开张后不久,希尔伯特就退休了。那时柯朗学生时代的英雄人物无一活跃在教师队伍中,但他们的继任者或多或少都有些才华。柯朗本人在他接近四十岁时,感受到了人生的圆满。他是一名大学教授,在那个时候的德国,特别是在像格丁根这样的小城,这是被

重视、保护和尊重的。他的家庭生活非常令人满意。有两个女佣帮助他的妻子尼娜分担了很多家务活和抚养孩子的责任。他的妻子很有音乐天赋，指挥过合唱团，并且对管弦乐有很深的造诣，在室内声乐方面也堪称杰出的表演者。柯朗本人也演奏钢琴，但大多数时候是用耳朵听。他的学生们常常被邀请到家中参加音乐晚宴。一家人每年都会去瑞士滑雪，也常常带助手们一块去。

柯朗觉得很多人在他看来都是"不友好的"。当他的成功可能引起嫉妒时，他有着戏弄别人的方式——让他们猜疑他的真实意图，说话轻描淡写、拐弯抹角，并缺乏决断。他喜欢探索人们对于某事的反应，甚至故意挑唆两个人之间的敌对情绪以在一定程度上了解情形。但是他的方法经常失效，而他的支持者们的忠诚度非常高。他身材矮小，所以他虽然可能看不到自己所处的位置，但是周围跟随着他的人经常会告诉他应该去哪儿。

在公众眼中，柯朗和施普林格出版社的合作取得了很大成功。他开始着手创作《数学科学原理》第二卷。他把微积分的讲座稿记录并出版，其中强调了分析和应用的紧密联系。在这件事情上他对助手的依赖过重，于是有谣言说他没有做好自己的本职工作。

当物理学家们发现需要利用《数学科学原理》中的数学方法时，柯朗又全身心投入到不同的工作中去，这导致了另一个戏剧性的变化。在研究中柯朗发现了一个被工程师们长期用于寻找问题近似解的方法，其精确解包含在求解困难的偏微分方程之中。柯朗从头开始，改善有限差分法直到得出精确的结果，而不仅仅是逼近它，或者至少是确定精确结果的存在。在第二次世界大战中，随着计算机功能的发展，他的理论被证明具有重要的现实性。

直到这时，柯朗仍未离开欧洲，但是他收到了去美国游学演讲的邀请。美国人到欧洲来学习已经很多年了，对于数学家来说，格丁根大学具有特殊的吸引力，所以柯朗与新世界保持着密切的联系。他的游学遍及常春藤联盟、美国中西部及加州大学各分校，他碰到了很多以前格

丁根大学的学生和访问学者。他精心维系着与洛克菲勒基金会的官员们的关系，同时结识了很多在未来的日子里有可能为他所用的其他美国人，他也在为格丁根大学那些有能力并且需要职位的年轻人寻求机会。但这是1932年，经济危机最严重的时候。在德国，政治局势同样令人担忧：数学研究所变成了自由主义思想的大本营，虽然格丁根小镇甚至整个大学并不是这样。

正如我们所看到的，当1933年纳粹取得政权之后，希特勒的第一个动作就是宣布将"非雅利安人"驱逐出公用事业，只有一些极个别的情况例外。柯朗的任期被暂停了，虽然作为一个老教授，他并没有被强制退休。但是这时候被认为有移民倾向对他非常不利，像其他的犹太裔数学家一样，在德国之外有很多让人满意的机会。他接到了来自土耳其的邀请，土耳其国父凯末尔·阿塔蒂尔克(Kemel Ataturk)准备要在伊斯坦布尔建立一所世界级的大学。柯朗在英国的剑桥大学做了一年的客座教授，但他并不喜欢那所大学，像他的很多同事一样，他想要去美国寻找一些机会。经过一番努力之后，纽约大学的两年期任命成为了他最好的选择。现如今，纽约大学是一所人才辈出的学府，但那时它如柯朗所描述的那样，"与我在德国所习惯的方式迥然不同，纽约大学没有一点科学的味道。"

但柯朗不是那么容易气馁的人。来到美国之后，他为自己的家人在纽约长岛购置了房产。他与普林斯顿大学的数学家们取得了联系，特别是那些从格丁根大学来的人。纽约大学为数众多的学生大部分是从东欧移民的犹太人的子女。他发现很多申请开始毕业设计的人都没有经过很好的准备。尽管如此，柯朗认为纽约大学拥有巨大的潜能，并决定善加利用。

纽约大学的校董支持柯朗的计划，很快就把他的临时职位变成了常任职位。与此同时，德国政府仿佛对柯朗怀有特别敌意一般，在他46岁时就强迫他从格丁根大学退休。虽然朋友们都劝他适应美国的方式，但在开始把每个人都组织起来之前，柯朗无法坚持为纽约大学的

那个库存不足、没有希望的数学图书馆出力。他著书立说，坚持订阅最新的德文学术期刊和其他系列的书籍，并给那些不得不留在德国的难民们一些钱用于这个目的。但是他会很注意不让自己的名字暴露。

到1936年时，柯朗的团队已经变成了数学毕业生中心的骨干。他开始考虑在美国重建一个类似于他留在德国的研究机构。那个夏天在奥斯陆召开的国际数学家大会提供了一个机会，让他见到了一些潜在的同行。他成功招募了两名优秀青年数学家，分别是德国人弗里德里希斯(K. O. Friedrichs)和美国人斯托克(J. J. Stoker)。为了见老朋友他涉险回到德国，虽然不是在格丁根大学。当对局势恶化到绝望的人们试图寻求柯朗的帮助时，才对他早已没有身在其位而难以置信。这个时候，甚至当你像阿廷一样有个犹太妻子，也开始受到纳粹的注意，新的一波难民潮已经开始酝酿。

虽然柯朗的绝大部分时间和精力都投入到毕业生中心的建立之中，他仍然坚持写作。与罗宾斯(Harold Robbins)合著的《什么是数学》(*What is Mathematics?*)获得了极大的成功。他同时也在尝试着完成《数学科学原理》第二卷，在这件事情上，弗里德里希斯发挥了重要作用。但是当美国卷入第二次世界大战后，这个项目被迫暂停。尽管柯朗在第一次世界大战中为德国而战，但在第二次世界大战中，他毫不犹豫地为收留他的国家而服务。纽约大学的课程被压缩了，但是毕业生中心成功地拿到了与战争相关的研究合同，主攻冲击波的数学原理。柯朗在这项研究中占有主导地位，但毋宁说这是在为他的教学而赚取经费。

战争结束之后柯朗回到德国，在格丁根做了一次伤感的游览，格丁根大学是德国第一所重新开课的大学。他之前在美国建立的纽约大学数学科学研究所，很快便以柯朗研究所而闻名全世界。新研究所的启用典礼于1954年11月29日举办，与格丁根的数学研究所相差近四分之一个世纪。在场的人会想起希尔伯特曾经在以前的场合所说过的话，“没有一个研究所像这个一样！如果要有另一个研究所的话，就要

有另一个柯朗!”

柯朗担任研究所所长有5年时间,和他做格丁根大学研究所所长的时间一样长。他非常渴望在1958年,当他年届70岁该退休时,会有一个游说团体来央求他继续做下去。虽然这也许不可能,但这却给了一些年轻人挑重担的机会,斯托克被选中了。这时的柯朗研究所出现了一个优秀数学家的核心圈子,他们其中的9个人未来将成为国家科学院的成员。在斯托克的主持下,大规模的科研和研究生教育课程开展了起来,1965年研究所搬迁到紧邻华盛顿广场的一栋14层楼的建筑中。到这时,它的工作人员已经不少于346人,包括科研人员、管理者和其他雇员。

在弗里德里希斯的协助下,“数学科学原理”第二卷完成了,第三卷也在筹划之中。由于缺少发挥其组织能力的机会,柯朗被从研究所劝退,但他仍然尝试让研究所像原来一样运作,甚至在70岁高龄时,他还时常和同事及学生一起远足旅行或是滑雪,在八十一、二岁时仍然关心着研究所的前途。柯朗于1972年1月27日在中风两个月后去世,享年84岁。他的妻子尼娜几乎比他多活了20年,在1991年100周岁时去世。

柯朗生前从美国、德国和其他地方获得荣誉无数。他是华盛顿科学院院士和很多研究机构的外籍成员。这位被介绍的最后一个德国数学家也是最出名的一个,但是很早之前就出现过对他的不同看法。像米塔－列夫勒一样,他可能会被主要描述成一位数学企业家。数学的世界需要能把事情搞定的人,但是很少有人能达到柯朗的成就。

亚历山大(1888—1971)

20世纪上半叶是普林斯顿大学数学研究发展的黄金时期:这对于拓扑学来说是非常确切的,很长时间以来,普林斯顿大学的拓扑学王子都是詹姆斯·沃德尔·亚历山大第二(James Waddell Alexander Ⅱ)。

他的祖先中有三位非常出名。他的曾曾外祖父詹姆斯·沃德尔(James Waddell)是一位著名的盲人牧师,18 世纪早期,他曾率领数千北爱尔兰人移民到弗吉尼亚州的谢南多厄河谷,而且为他的子民建立了很多基督教长老会和学校。他的曾外祖父阿奇博尔德·亚历山大(Archibald Alexander),从 1812 年普林斯顿神学院建立开始便首任教授和院长,直到 1851 年去世。普林斯顿市的亚历山大路、亚历山大厅都是以他命名。他的大儿子詹姆斯·沃德尔·亚历山大第一(James Waddell Alexander)也是一位牧师首领。作为纽约第五大道教堂的主教,从 1849 年一直到他去世的 10 年间,他组织起了一个富有、慷慨而影响深远的教会。它的成员之一就是至今仍是美国最顶尖的人寿保险公司——公平人寿保险的奠基人,而亚历山大家族的诸多成员都在这家公司担任要职。



未来数学家的母亲伊丽莎白(Elizabeth)就是家族众多担任过公平人寿保险总裁和副总裁的某一成员的女儿。她嫁给了匹兹堡的约翰·怀特·亚历山大(John white Alexander),两人虽然没有亲戚关系,但却拥有共同的姓氏。约翰从小便表现出艺术家的气质(他在父母去世后被领养)。在欧洲学完绘画后,他起初在美国工作到 1890 年,随后又在巴黎工作到 1901 年,之后返回美国。他靠画肖像和壁画挣了很多钱,成为 20 世纪初美国最顶尖的艺术家之一。无论在美国还是法国,亚历山大家族都拥有崇高的声望。在巴黎他们交往的人中包含德彪西(Claude Debussy)、詹姆斯(Henry James)、马拉梅(Stéphane Mallarmé)、罗丹(Auguste Rodin)和萨金特(John Singer Sargent)等名流,20 世纪 30 年代,伊丽莎白的丈夫去世,此后她的家因成为纽约艺术家的聚会场所而出名。

他们唯一的孩子,未来的数学家亚历山大,1888 年 9 月 19 日出生

于新泽西州的锡布赖特。他在巴黎以及纽约的布朗宁学堂接受了早年的教育。他1906年考入普林斯顿大学,1910年毕业于数学和物理专业,第二年获得硕士学位。年轻时他留着“沙红色”的胡子,崇拜萧伯纳的政治主张,参加过纳索街(普林斯顿市的主干道)的游行,在新泽西州的首府特伦顿通过肥皂盒发表过演讲。他父亲在他成长期间多次为他画了肖像画。

1910年,年轻的亚历山大已经成为维布伦的弟子。在普林斯顿大学做了一年的讲师后,他在1912年来到欧洲,访问了巴黎和博洛尼亚。他很有可能在巴黎见到了阿达马,在博洛尼亚见到了恩里克斯。回到普林斯顿大学后,亚历山大在瑞典裔美国数学家格朗沃尔(T. H. Gronwall)的指导下开始了博士论文的写作。很明显,维布伦认为亚历山大将博士论文题目选在如拓扑学这样新的领域是一件危险的事情。但相反地,亚历山大写出了后来被证明为在单叶函数的复分析中具有奠基意义的著作,题目为《将单位圆内部映射到单区域上的函数》(*Functions which Map the Interior of the Unit Circle upon Simple Regions*),格朗沃尔作为斯德哥尔摩米塔-列夫勒研究小组的成员,1913—1914年曾经在普林斯顿大学做过讲师,第二年又成为了助理教授。那篇让亚历山大在1915年获得博士学位的论文,发表在当年的《数学年刊》上。此外他还发表了很多关于代数几何学的研究成果,包括措伊腾-塞格雷不变量在代数曲面上的拓扑学推导,并证明了在克雷莫纳变换中的诺特定理。

当亚历山大开始着手他的拓扑学研究时,庞加莱刚在十年之前完成了对这个问题的阐述。布劳威尔仅仅在大体上展示了新方法可能会给这个问题的研究带来突破。维布伦还没有在他即将完成的第一部关于拓扑学的教科书《拓扑学》中对该问题进行专题讨论。庞加莱对这个领域的贡献是巨大的,但背后缺少强有力的逻辑论证。亚历山大(与维布伦合作)的第一个贡献就是使这个领域更加有逻辑性。这直接催生了1915年的著名论文,建立了贝蒂数和挠系数的拓扑不变性。

虽然他只处理了三维领域中的问题,但是亚历山大的讨论使得这个问题在拓展到一般领域时变得容易。但是不得不说,最初的工作往往需要一些修正,在他1926年的研究报告中,这个问题才真正得到令人满意的解决。

后来的两年间,亚历山大一直待在普林斯顿大学。美国参加第一次世界大战后,他在美国军队以中尉(后来是上尉)的身份服役,开始时在美国本土的阿伯丁试验场,后来被派往欧洲。1918年1月11日,他与在巴黎结识的白俄罗斯姑娘纳塔利娅·列维茨基(Natalia Levitzky)在华盛顿完婚。退役后,亚历山大重新回到普林斯顿大学做助理教授。从1920年开始,他专注于拓扑学研究。

庞加莱工作日程中的核心问题是流形分类,特别是三维闭流形问题。在接下来的10年中,亚历山大发表了一系列论文对这个问题加以研究。当庞加莱研究这个问题时,他首先考虑的是应该把同调的流形归类为同胚。当他发现了在三维球面上同调但属于不同基本群的特例存在时,他猜想同调和基本群应该是充分条件。1919年亚历山大发现了三维流形族,即透镜空间,这提供了反例。如今这仍是一个未解决的问题,即是否存在单连通三维流形,它对球面并非同胚。

他第二年的成果以对若尔当曲线定理的完美证明作为开端,接下来是对若尔当-布劳威尔定理的证明及扩展。这使得著名的亚历山大对偶定理在1922年正式出炉,之后又扩展到不同的方面。这是一个重要的发现,不仅仅是定理本身,还因为其所包含的某些异常,其结论对于不同系数的同调理论及之后的上同调理论的发展影响深远。这一硕果累累的时期在1926年随着他那重要的组合拓扑学研究报告的发表而达到巅峰,这是他对早期工作的扩展和阐述。为此他获得了美国数学学会1929年度颁发的著名的博谢奖。

20世纪20年代末期,亚历山大对纽结理论产生了极大兴趣,他在1928年对此作了深入研究。他将给定的纽结图和一个多项式矩阵相结合,并证明了这个矩阵的等价类(等价类比普通类具有稍多扩展意

义)对纽结型来说是一个不变量。从这个矩阵等价中,他利用实质上经典的方法,抽取了一个多项式序列,特别是现在被命名为亚历山大多项式的那一个,它是一个显著的不变量,易区别于19世纪编纂的纽结表中所归纳的大部分纽结。其他一些纽结的多项式不变量也在不久之前被发现了。

这一时期的亚历山大深受莱夫谢茨研究的影响。1924年,正如我们所知,他说服了维布伦将莱夫谢茨从堪萨斯大学带到了普林斯顿大学,因为莱夫谢茨在那里完全处于孤立的工作状态。亚历山大和莱夫谢茨在很多方法上背道而驰。多年之后惠特尼对他们之间的关系点评道:"他们会自发地讨论拓扑学问题。但是亚历山大对此越来越谨慎;因为莱夫谢茨会抛出一些结论,但并未意识到它们来自亚历山大。亚历山大是一名严谨且认真的研究者,但莱夫谢茨的理念中充满着激情荡漾和未知的起点。"但无论如何,亚历山大、莱夫谢茨和维布伦组成了一个强大的团体,不仅把优秀的研究生,而且把高级的访问学者从欧洲和世界各地吸引到普林斯顿大学。亚历山大在1926年被任命为副教授,两年之后又被任命为正教授,虽然他只是兼职授课,并领取一半的工资。在他30岁时,他的名望已经将很多顶尖学者从欧洲吸引到了普林斯顿大学,亚历山德罗夫、切赫(Čech)、霍普夫、胡雷维奇等人就在其中。1933年亚历山大和维布伦转往新的高等研究院,爱因斯坦、冯·诺伊曼和外尔也被招募去了那儿。莱夫谢茨认为他相比亚历山大更应该获选,并为此责备了维布伦,这使得亚历山大陷入窘境。

这个时期组合拓扑学已经在很多应用中产生了意义,不再适合被叫做点集拓扑学。亚历山大在1932年苏黎世国际数学家大会上阐述了他的观点。

一般来讲,我们所说的拓扑学处理的是几何图形中那些当图形发生任意的连续变换时仍旧保持不变的性质。但拓扑学有很多不同的类别,因为用数学语言来解释连续性的物理概念有几个不同的方式。举

例来说,有一种被称作点论的拓扑学,是与莱布尼茨所提出的原生拓扑学从理念到内容都完全不同的,这一流派是从函数论中衍生而来,但在莱布尼茨看来,这完全是一种全新的、独立的数学类型,用来避免函数论的复杂化,直接处理几何问题的纯定量方面。毋庸置疑,组合拓扑学更接近于莱布尼茨的原生想法。

20 世纪 30 年代中期,上同调理论正处于萌芽阶段。1935 年第一届国际拓扑学大会在莫斯科举行,亚历山大和柯尔莫戈洛夫,在各自完全独立的情况下,发现了异常相似的乘积公式,我们今天称之为上同调。这个乘积很奇怪,以错误的维度作为结尾。不过在会议之后,切赫和惠特尼发现了正确的构成。但亚历山大在接下来的 10 年里继续发表他的论著,至此他的伟大事业告一段落。

第二次世界大战期间,亚历山大以平民身份参与了美国空军科学研究与发展局。他的最后一篇研究论文,"光栅"系列之一,在 1947 年出炉,在这之后,由于莱夫谢茨的介入,他抛弃了这个领域,投入到新生的领域中去。1948 年他被推举为研究院的终身成员(不受薪),而不再担任教授,但虽然他在那儿保留了办公室,却很少与同事交流。3 年后他彻底退休,真正意义上从数学的舞台上消失了。非常了解他的塔克试图说服亚历山大参加为莱夫谢茨而组织的退休研讨会:"1953 年当莱夫谢茨退休时,我们为莱夫谢茨庆祝而组织了一个研讨会,我打电话给亚历山大,特意邀请他参加各项活动,当邀请他来参加我们为莱夫谢茨举办的答谢晚宴时,亚历山大说,'我很想去,但我从不出席人多的场合。'他接着说,'让我再想想。'就在一周前,他说,'我想去。'我没有亲自和他本人谈。最后,他只是简单的留了一张纸条:对不起,他不能来了。"

1967 年他的妻子纳塔利娅去世后,亚历山大的健康状况每况愈下。他早年患过小儿麻痹症,一直没有恢复。他年轻时候所持有的左翼观点让他在麦卡锡(McCarthy)时代遭到监视。他晚年成为了一个业

余的无线电爱好者,并与世界各地的热衷者通信以打发时间。1971 年 9 月 23 日,他在普林斯顿医院因肺炎去世,享年 83 岁,留下了一个儿子约翰(John)和一个女儿伊丽娜(Irina)。

为了更好地了解亚历山大,我们来看看塔克的回忆录:

(亚历山大)是土生土长的普林斯顿人,也是在这里接受的教育,包括本科教育和研究生教育。之后他成为了普林斯顿大学的教员。他成长于一个古老的普林斯顿家族。他相当富裕,所以他从来没必要为自己的生计而工作。在他的早年,大概在 1920 年左右,他对社会主义运动非常热衷。那个时候,托马斯(Norman Thomas)长期是社会党的总统候选人。托马斯毕业于普林斯顿大学,是否同意他的政治观点被普林斯顿人深入思考。很显然,亚历山大赞同托马斯的观点。我觉得在某些方面甚至可以认为亚历山大是纽约周围社会党的积极组织者。我尝试着描述这个人的风格。他非常英俊,穿着得体,但不穿正装而穿运动装。他对学生非常友善,甚至是以父亲对孩子的方式。不喜欢他是不可能的事情,因为他非常友善谦和,思想深邃。他不开车,也从不争强好胜,除非是在爬山时,而不会在数学和科研中。

事实上,亚历山大在他那一代美国人中是杰出的登山者。1921 年他在科罗拉多州攀登了朗斯峰的陡坡,第二年从登山学校毕业,他的登山日记记录了超过 200 次的攀登,大部分都是主峰。在技术纯熟之后,他被更加困难的目标所吸引,他寻找新的路线,并对没有向导的攀登方式更加偏爱。他的很多学生,如科恩(Leon Cohen)、惠特尼,被邀请参加他的登山之行,在那里数学与登山有了联系。虽然他攀登过很多险峰,但是他对沙莫尼山谷非常偏爱,他和纳塔利娅每年都会去。他在莱苏什有一所小屋。他们常常结伴登山,虽然她不是很热衷,但是比起傲慢的法国社会来说,他们更享受在沙莫尼山谷的夏日时光;他们的法语都非常流利。从 1937 年开始,他们放弃了欧洲的旅行,也减少了北美

的登山活动。

在普林斯顿大学周边,亚历山大还因为他敢于攀登高校的建筑而出名,例如克利夫兰塔。他喜欢从建筑的外墙爬到他位于法恩厅顶楼的办公室,然后从窗户进去,为此他办公室的窗户总是半开着。另外他还坚持建筑物必须要设置淋浴室和储存柜,如此一来,这些东西便可以被像他一样热爱拳击、网球或是壁球运动的人所用。他是一位滑雪专家,而且喜欢棒球运动。

亚历山大家族非常富有,但是他们从不铺张浪费。但正如塔克所形容的那样:"他和那些普通的教授有很大的区别,因为他在小镇的西面有一个很好的住所。周日下午研究生们会被邀请去喝茶。正如你知道的那样,他家里会请佣人。这显然是一个富贵之家。"和大学里的大多数人相比,亚历山大家族拥有很高的社会荣誉。当他们举办聚会时,被邀请的人不仅包括学者,还有很多另一部分普林斯顿人,那些喜欢生活在小镇,但在费城或纽约经营着企业的人。他们常常举办舞会。亚历山大很喜欢探戈,经常去洛克菲勒中心的彩虹厅,纽约的社会名流经常去那儿跳舞。他们研制出一种符号来记录舞者的步伐和其他动作。他对打油诗的创作也很感兴趣。

在公众看来,亚历山大是一位杰出的演讲者,在普林斯顿的数学家中他是最好的一个。在不失准确性的前提下,他能够用一种自然的方式表达出来,让听众乐于接受,虽然很多人觉得他们从那些不那么优雅的演讲者那里可以学到更多。塔克记录道:"他是一个很好的老师,优秀的老师,但我不认为他享受着教学的过程。他不需要报酬,而且如果被强迫去讲一些他不感兴趣的课程他会觉得很厌烦。如今他是这样一个人,如果他答应去讲一门课,那么他会尽职尽责。但是如果是本科生的课程,他可能会发现没有一本教科书合他的胃口……[接下来]他会试着在学生的帮助下总结出一套笔记,而不是按照教科书去讲。但这是一项繁重的工作。"

亚历山大个人的专业论文被保存下来的很少;他几乎不写信件,作

为一个完美主义者，他有大量研究成果没有发表。就像塔克所说：

在亚历山大年轻的时候，他保存了很多材料，他写的大部分论文没有公开发表。在20世纪30年代的拓扑学研讨会上，很多数学博士后讨论了很多问题，亚历山大也受邀出席。在最后的问题环节，亚历山大对演讲者说："如今，你已经将你的方法运用到这些问题中来了吗？"当然，那个从未考虑过这些问题的年轻人只能说："不，我不知道会有什么结果。"之后亚历山大开始半自言自语地说道："哦，我记得我曾经研究过你所讨论的问题，但是我觉得除非我做出一些成果，否则它是没有发表价值的。"年轻人显得很尴尬。但亚历山大并不是故意为难他；他只是对这个年轻人没有去参加登山而感到遗憾。

亚历山大曾在美国数学学会的理事会供职（1923—1925），并担任过副主席（1933—1934）。1930年他当选为华盛顿科学院院士。他获得过普林斯顿大学的荣誉学位，一共获得的普林斯顿大学的学位数达到4个。

第十章

从巴拿赫到冯·诺伊曼

我们要讲述的最后6位数学名家生于1892—1903年的12年间。其中3位来自俄国，另外3位分别来自匈牙利、波兰和美国。

巴拿赫(1892—1945)

19世纪末期前后，匈牙利和波兰均在很大程度上独立于奥地利的控制，发展出重要的数学学派，并在第一次世界大战后两国独立之际兴盛一时。前章所述的波利亚，是匈牙利学派的杰出代表，而这一传略的传主、更具东欧特性的斯特凡·巴拿赫(Stefan Banach)，则是波兰学派的出色典型。

巴拿赫于1892年3月30日出生在波兰古城克拉科夫。他的父亲斯特凡·格雷茨克(Stefan Greczek)是一名小公务员，来自山村奥斯特罗夫斯科，后两度结婚，第一次婚姻中有一子，而第二次则有4个小孩。他的母亲在其出生证明上记作卡塔芝娜·巴拿赫(Katarzyna Banach)，此外则一无所知，因为他的父亲对她的身份保密。而母亲的养育之责似乎由住在奥斯特罗夫斯科的他的祖母所承担。但当祖母患病后，其



父便将小巴拿赫带回克拉科夫,在那里他由一户姓普洛瓦(Plowa)的家庭抚养。

第一位认识到巴拿赫才能者,是一名法裔知识分子,他抚育男孩成长,为其讲授法语,并全面监管其教育。不过格雷茨克也从未将其子忘却,即便是他已建立自己的家庭。他不仅提供一些经济资助,还与抚养巴拿赫至大学毕业的普洛瓦一家保持紧密联系。1902 年,巴拿赫进了当地的中学,这所学校的教育计划偏重于艺术而不是科学。像克拉科夫的其他中学一样,这所学校也得益于高等学校联盟成员的补充教学,尤其是著名的雅盖隆大学。巴拿赫的数学成绩经常是优 + ,其他学科也是良或者优。他的一位同学说他"与同学们相处得很愉快,但是除了数学以外对别的事情都不感兴趣。如果他面对大家说话,他会说得很迅捷,就好像他在用数学的方式思考。他在快速思考和计算方面有着令人难以置信的天赋,跟他对话的人都觉得他非常有洞察力。"

1910 年从中学毕业以后,巴拿赫浑身上下一文不名地离开了克拉科夫,尽管跟父亲的关系依然很好,但也不能再指望从父亲那里得到更多的资助。他在利沃夫理工学院登记注册为一名工科学生,但因为需要工作来养活自己,他的学业进度缓慢。当 1914 年战争来临的时候,他仅仅完成了第二年的课程。因为视力很差,巴拿赫没被要求去武装部队服役,而他在建筑工地找了一份工头的工作来谋生。他在战争时期的生活细节并不为人所知,但似乎他有些时候已经在旁听雅盖隆大学的讲座,尽管没有正式地注册登记为那里的学生。

不管怎样,1920 年巴拿赫已经成了斯坦因豪斯(Hugo Steinhaus)的弟子。这是个把巴拿赫称为自己一生中最伟大发现的人。斯坦因豪斯在年龄上只比巴拿赫大 5 岁,但在专业学术生涯上比巴拿赫资历老了许多。凭借一篇三角级数的论文,他在希尔伯特手中取得了博士学

位，现在他在老城利沃夫的简·卡齐米日大学任教授。他在数学上有着广泛的兴趣，并在教学和普及方面很有天赋。巴拿赫与他未来的妻子卢恰·布劳斯（Lucja Braus）也是通过斯坦因豪斯认识的。他俩于1920年10月19日结婚。在巴拿赫余下的25年跌宕起伏的生命中，她一直是他最亲密和忠诚的伴侣。

不久以后，巴拿赫完成了他的博士学位论文《论抽象集合的运算，及其在积分方程上的应用》（Sur les opérations dans les ensembles abstraits, et leur application aux équations intégrales）。我们所知的巴拿赫空间的概念就是在这篇论文中首次出现。其他一些数学家也在以相似的方式进行研究，但巴拿赫提出的概念与众不同的特征是，问题中涉及的空间需要满足"完全性"这一关键的额外条件。该论文还收录了以他的姓氏命名的基本的不动点定理。巴拿赫从来不亲自将他的想法付诸笔端，而是口述他的想法由助手记录，随后再去修缮结论。这篇论文原文由波兰语写成，被翻译成法语后发表在一本叫《基础数学》（*Fundamenta Mathematicae*）的新杂志上，这本杂志专注于集合论和数学基础。

1922年获得任职资格后，巴拿赫被任命为简·卡齐米日大学的副教授。利沃夫是波兰文化和科学的重要中心，这里的咖啡馆交际十分兴旺。在波兰国内外的传闻和记录都表明，咖啡馆文化构建起了波兰式的数学研究。巴拿赫经常因为举办这样的咖啡馆研讨活动而赊账。利沃夫城里的数学家们把市中心的苏格兰咖啡馆当作了他们的基地。就在那里，许多新理论被发现，许多猜想被提出，许多难题被记录在那本著名的苏格兰语书上。在所有这些活动中，巴拿赫都扮演了领导角色。

尽管信息缺失，但我们知道1924年他去了巴黎做学术访问。他在那里做了几场讲座，应该也是在那里见到了后来成为其一生之友的勒贝格。1927年，巴拿赫晋升为正教授。1929年，颇有影响力的杂志《数学研究》（*Studia Mathematica*）创刊了，它作为利沃夫学派的喉舌，着重

关注泛函分析，而这并非《基础数学》的关注点。第一期杂志就收录了巴拿赫的一篇论文，被称为哈恩－巴拿赫定理的结论出现在这篇论文中。在《数学研究》的创立过程中，巴拿赫和斯坦因豪斯是主要的发起者。两年后，他们又正式推出了一系列数学专著，大都是关于泛函分析的。

巴拿赫的成就在国内外逐渐得到更多认可。1936 年，他在奥斯陆国际数学家大会上向全体人员做了演讲。1939 年，他被选为波兰数学学会会长，这是他 20 年前开始帮助组织起来的机构。在该学会的赞助下，许多外国数学家来到波兰进行工作访问。同年，他获得了由波兰知识学院颁发的大奖，但由于第二次世界大战爆发，银行账户被冻结，他没能领到奖金。

1939 年 9 月 17 日，作为《苏德互不侵犯条约》的后果，苏联入侵波兰，苏联红军迅速占据了利沃夫。随后，波兰人被大规模地驱逐出境。1940 年，巴拿赫当选市议员，这使他能够利用他的影响力帮助受迫害的波兰社会中的人们。巴拿赫的父亲和其他家庭成员从克拉科夫搬到了利沃夫，在这里巴拿赫可以为他们提供庇护。

巴拿赫本人作为苏联数学家领袖的身份已经众所周知。当亚历山德罗夫、索伯列夫（Sobolev）等苏联数学家来利沃夫拜访他的时候，他能够去与他们见面。1941 年，《苏德互不侵犯条约》被撕毁，德国入侵苏联的时候，巴拿赫身陷基辅，他正在那里参加一个会议。他立即搭上了最后一班从基辅发往利沃夫的列车，不顾自己的人身安全，返回他的妻儿身边。

当 1941 年 6 月德国军队进驻利沃夫的时候，巴拿赫一家发现自己处于一种十分困难的境地中。巴拿赫本人担心德国人会要求他解释他跟苏联数学家之间的友谊。他作为波兰知识界一份子的身份使他陷入了危险之中。他因涉嫌非法买卖德国货币被盖世太保逮捕，但几周之后就被释放了。在狱中时，他还设法证明了几条定理。

1941 年 7 月 3 日夜晚,40 名波兰学者、教授、作家及利沃夫知识界的领袖人物被纳粹和来自臭名昭著的党卫军夜莺营的乌克兰人杀害了。特别行动突击队紧随着前线部队出现并行动,做完这一切后又消失了。这次暴行似乎没有得到纳粹国防军的正式批准,但却由当时造访此地的希姆莱(Himmler)直接下令实施。这次暴行只是一场更大行动的开端,意图在于毁灭在利沃夫的波兰知识分子的生命。

巴拿赫侥幸逃得一命,但德国占领时期的境况还是十分严酷。和许多其他波兰知识分子一样,他从事着很不体面的工作——在一家研究伤寒症疫苗的德国实验室里养虱子。但在 1944 年 7 月,苏联红军打回了利沃夫,巴拿赫的状况得到了改善。苏联数学家索伯列夫在苏联科学院靠近莫斯科的一个分支机构见到了他。索伯列夫说:"尽管还带着德国占领时期战争年代的沉重印记,尽管沉重的疾病(癌症)在暗中损害他的力量,但巴拿赫的眼睛依然那么灵动有生气。他好交际、快乐、非常善良和迷人,他仍然是那个我战前在利沃夫见过的他。他就是这样印在我的脑海中:具有极强的幽默感、充沛的精力、美丽的灵魂和伟大的才能。"

雅盖隆大学发来一份教授职位的邀约,巴拿赫接受了。他还收到了战后政府的教育部长职位的邀请。但他罹患的肺癌持续加重,他于 1945 年 8 月 31 日在利沃夫逝世,享年 53 岁。数百人参加了他的葬礼,包括许多雅盖隆大学的女学生,她们每人手里捧了一束鲜花。他的妻子卢恰在约 10 年后随他而去。作为 20 世纪最伟大的数学家之一,巴拿赫的名字与许许多多的基础与原创数学联系在一起,尤其是在泛函分析领域。在波兰,他被当作民族英雄。

在众多对巴拿赫的回忆中,我们先从斯坦因豪斯的开始:

作为巴拿赫事业的见证者,请允许我这样说,他拥有一种曾被巴特尔(Kasimierz Bartel)称为"几乎令人讨厌的"犀利思维。他从不指望事情自己发生幸运的转折,也不指望前提假设能在需要的时候全被满足,

他总会说,“希望是傻瓜他娘。”他对乐观主义的鄙弃不仅表现在数学上,也表现在对政治预言的态度上。他直接向问题发起冲击的方式就像希尔伯特一样——打个比方,就像排除了所有岔路之后,他全力以赴地冲击最后剩下的那条直指目标的路——他坚定地相信,逻辑分析的方法,就像是棋手分析困局一样,不管是在定理的证明还是反例的证伪中,都会起到引导作用。

巴拿赫的一个同事补充说:

巴拿赫确实出版了他最重要的那些工作,但并不是全部。我可以解释一下原因。巴拿赫记录和编辑的速度跟不上他那令人瞠目结舌的创造理论的速度……巴拿赫打破了所有的获取新结论的速度纪录。而解决一个问题常常意味着又引出了另一个问题。所以巴拿赫从来不对他的科学发现做笔记。他只是与利沃夫的数学家团体口头交流这些发现。如果他们中有两三个人认真编排他们从巴拿赫那里听来的这些发现,那么巴拿赫毕生的研究成果就可以被保留下来了。但是事实上,每个人都全神贯注于自己的创造性工作,而不是记录别人的理论。

一名他曾经的学生回忆道:

巴拿赫是个极好的老师,这是个共识。他从来不会纠结于细节,也不会用很多复杂的方程式填满整个黑板。他不在乎语言表达是不是完美,所有华美的辞藻和修辞都与他无关。他几乎从来不写信。他对他的助理也很亲切慈祥,几乎就像父亲一样。他表现得就像他们的搭档,全无那种傲慢的、家长式的或者高人一等的感觉。在数学讨论中,或是在他对一般主题做的短评中,人们几乎可以立刻感受到他才智的伟大能量。他善于在零散紧凑的时间段里保持工作。他可以在火车站的候车厅里照样工作,就像是在他学校的办公室里一样。

所有人都认为他是个工作狂。一位同事写道：

这是真的，但是他努力工作时的习惯与众不同。一个学者工作时通常需要安静平和的环境，但巴拿赫不一样。他会花很多时间在咖啡馆里，不仅会跟一帮人一起去，只有他自己一个人时也会去。他喜欢那里的喧闹声和音乐。这些不会妨碍到他的专注和思索。有些情况下，在咖啡馆深夜关门了以后，他会散步到火车站旁24小时营业的自助餐馆去。在那儿点上一杯啤酒，他就开始思考他的难题。说实话，我必须插一句，他也并不是一直都能很快地解决每一个问题。有一次他告诉我，一个问题困扰了他好几个月，每天都要想好几个小时。但是在不那么复杂的情况下，他的理论就可以像泉水般喷涌而出。这实在是太非凡和不可思议了。

照片中的巴拿赫显得身材健美颀长、肩膀宽阔，他有个高额头，头发梳得光亮，带着半是怀疑半是挖苦的微笑。面部最引人注意的是他蓝色眼睛透射出来的魅力，敏锐、有穿透力，像要用X光看透对面的人，又像是在凝望着深空的某个地方。那些经常见到巴拿赫的人证实了他的这种表情和凝望的目光。一位他的同事补充说："他看上去总是很年轻。他很高，金发碧眼，还很强壮。他说话的方式让我觉得很直接有力，甚至有些过度粗糙（我后来才意识到，那种特质一定程度上是他自己刻意培养的）。"

他一生都保持着一些这样的特质，言行上像个克拉科夫的街头混混。"知道吗，哥们儿"他对斯坦因豪斯说，"我跟你说，在高校研究人文学科比研究数学重要多啦，数学是个太锋利的工具，小孩玩不好，容易伤着。"他喜欢看足球。人们喜欢拿他喝掉的那么多酒和咖啡讲段子。"我兄弟喝的咖啡得用加仑计量，酒也不计其数，"他同父异母的妹妹回忆说，"有一次他去格鲁吉亚参加一个数学会议。当地有个传

统,在宴会上,要连续向在场的每个人敬酒祝健康,不能间断。每次敬酒的时候,要干掉一大杯格鲁吉亚烈性伏特加,这是规矩。巴拿赫喝倒了所有当地的酒场老手,当其他数学家一个个醉倒在桌子下面的时候,他还能自己站稳。”

维纳(1894—1964)

现在我们再次跨越大西洋。关于天才们的心理状态我们已经写了很多,不管是涉及某种程度的疯狂或者仅仅是一些小怪癖。诺伯特·维纳(Norbert Wiener)会是一个有趣的研究案例。“他的反应能力像个孩子,他的判断力却像个哲人,”十分了解他的桑蒂利亚纳(Santillana)这样评论。他对自己的能力有着很深的理解,这一点上他是对的。他既有着精湛的技巧又富有创造力,所以当他去世的时候,他被出版社称为美国的莱布尼茨。



诺伯特·维纳1894年11月26日出生于美国密苏里州的哥伦比亚市。他母亲贝莎[Bertha,娘家姓卡恩(Kahn)]和他父亲里奥·维纳(Leo Wiener)在堪萨斯城的一个崇拜诗人勃朗宁(Browning)的文学俱乐部相识。他们用勃朗宁的诗《在阳台上》(*On a Balcony*)中的人物给孩子们起名,诺伯特的名字也是这样得来。里奥出生在波兰的比亚韦斯托克,后来去了俄罗斯。他是位数得上名号的语言学大家,有很多著作,包括意第绪语文学的历史,还翻译了托尔斯泰全集。1880年,他囊中羞涩却决心满满地从白俄罗斯来到了新奥尔良。很早之前他就已经成为了密苏里大学的外国语教授。1895年,他获得了哈佛大学斯拉夫语言文学系的讲师职位,后来成为了正教授。尽管他强烈反对哈佛大

学的犹太人入学名额限制措施，他还是留在哈佛大学直到 1930 年退休。里奥于退休 9 年后去世。

里奥·维纳是个非常严苛的人，这在他儿子的教育方面也产生了极度强烈的影响。诺伯特的母亲作为一个百货店主的女儿，似乎在儿子的教育上没有什么话语权。诺伯特是个小神童，小时候一边在学校接受教育，一边在家由父亲教导。1903 年，原本住在马萨诸塞州剑桥市附近的维纳一家搬到了乡下。诺伯特在那里过得很幸福。长大以后，他表达了对新英格兰地区一些小城市民主政治特征的赞赏。

11 岁时，维纳就进入了塔夫茨学院，他对科学尤其是生物学有着特别的兴趣。4 年后，维纳顺利毕业。在这之后，他尝试着在哈佛大学学习动物学，在康奈尔大学学习哲学，之后又回到哈佛大学学习哲学和数学。他于 1913 年以 19 岁的年龄拿到了哲学博士学位。他的论文课题是罗素 - 怀特海逻辑系统与施罗德早先建立的系统之比较。这段时期内，他似乎始终被青春期抑郁深深地折磨。显然，当他身在哈佛大学时，他第一次意识到自己是一名犹太人。事实上，他是中世纪时期伟大的导师摩西·迈蒙尼德(Moses Maimonides)的旁系后裔。虽然他并不十分看重希伯来信仰，但对犹太人在数学及其他科学方面的出色成就，他还是非常引以为豪的。

青年维纳成为了一名哈佛研究员，这使他可以去欧洲学习，并最终摆脱了父亲的管教。从 1913 年 6 月到次年 4 月，他一直在剑桥大学。据引述，他曾经说过："像许多其他青少年一样，我步入了一条黑暗的隧道，我什么东西都看不到，也不知道这里到底有没有什么东西。直到我快 19 岁时开始了我在剑桥大学的学业，我才从这条隧道中慢慢逃脱出来。"一开始，维纳跟随罗素学习数理逻辑。罗素对他的哲学理解能力没什么好印象，于是建议他学习更多数学，特别是数学物理，尤其是爱因斯坦的最新理论。维纳接受了这个建议，参加了哈代的分析学课程。"在我这辈子听过的所有数学课当中，"他后来这样说，"从未有能与哈代的课程匹敌的，它们是那么条理清晰、生动有趣和富有智慧力

量。”由于罗素打算在哈佛大学完成春季学期，维纳便去格丁根大学，跟随那里的一些著名数学家短暂地学习了一段时间。

当1914年第一次世界大战爆发时，维纳回到美国，对自己未来的职业方向充满了迟疑和犹豫。他尝试了很多工作，还一度做了报社记者。他在哥伦比亚大学跟随杜威（John Dewey）学习哲学，又在哈佛大学短期任教。经历了并不愉快的几个月之后，他在缅因大学成了一名数学教员。后来，他把这段时期描述为噩梦般的日子。随后他又做了其他一些短暂的工作。美国参战后，维纳加入了在马里兰州阿伯丁试验场研究弹道学的科学家、工程师团队。在那里他认识了维布伦，维布伦的成果对军事应用十分有帮助，维纳对此印象深刻。这段经历帮助他确立了关注的重点，那就是由潜在的实际应用激发的那一类数学问题。

战争一结束，维纳就在麻省理工学院获得了一个讲师职位，而他在那里一直工作到1960年退休。他从未隐瞒自己更希望在哈佛大学工作。当时麻省理工学院的数学系并不强大，但值得欣慰的是，数学系与工程系和物理系的联系十分便利。维纳的首个研究考察的是布朗运动，为此他还创立了一个数学理论。爱因斯坦早先曾对这一实验现象进行过研究；但显然是罗素将维纳的注意力吸引了过来。然后他的研究转向了刚由希尔伯特复兴起来的变分法计算中的狄利克雷方法。为了对这个理论加以改善，他发明了众所周知的维纳测度，这是他职业生涯早期的最高成就。

1962年，维纳和他父亲曾经的学生玛格丽特·恩格曼（Margaret Engemann）结婚了。玛格丽特和家族的其他成员在她14岁时从德国移民至美国，她成为了宾夕法尼亚州亨廷顿朱尼亚塔学院现代语言学的助理教授。她生了两个女儿，芭芭拉（Barbara，生于1928年）和佩吉（Peggy，生于1929年）。

1922到1927年之间，维纳几乎每年都访问欧洲，但由于与柯朗的矛盾而鲜少去格丁根大学。譬如维纳曾经指出，柯朗的有限差分法的

思想在维纳与别人合著的论文中早已出现过。此类事情一再发生，以至于维纳在万分恼怒之下写了一本未曾发表的小说，主人公是一位将有才华的年轻数学家的想法盗为己用的卑鄙教授，而这显然是以柯朗为原型。1928 年，他申请了一个澳大利亚墨尔本大学的职位，但是尽管卡拉泰奥多里、哈代、希尔伯特和维布伦都对此表示支持，他却没有获得这个职位；然而，这似乎推动了麻省理工学院授予他终身职务，1932 年他成为了正教授。在此之前，作为哈代的副手，他在剑桥大学待了一阵，期间他与才华横溢的年轻分析学家佩利（R. E. A. C. Paley）结交。维纳将佩利带回了麻省理工学院，而他们的合作成果颇丰，直到 1933 年佩利在滑雪时过早身亡。佩利 - 维纳定理成为了线性偏微分方程理论的基础工具。

维纳活跃于纳粹当道后成立的旨在帮助流离失所的德国学者的美国急救委员会，维也纳的逻辑学家门格便是他私人救助过的对象之一。第二次世界大战爆发时，维纳曾提议将计算机应用于战场，但在当时由于可行性问题而被大大地忽略了。战后他继续对各种学科进行思考，特别是统计学、工程学和生物学。他从工程学中反馈的概念出发，以控制论之名，大大扩大了它的适用范围；维纳经常被称为“控制论之父”。他的一些想法被冯·诺伊曼采用，后者开发出了更多的有效应用。这里使用的人物相片拍摄于 1945 年，那时他刚过 50 岁。

据弗赖登塔尔（Freudenthal）所说，维纳是一位众所周知的糟糕解说者：

在终于完成一个对一位才智过人的大二学生来说实在简单的证明题之后，他会在不加证明的情况下假设一个看似与前文无关的重要定理，接着给出一个莫名其妙且离题的证明，然后他会用一个毫不相关的过往解释来打岔，同时他会引用书中“上一章”，但其实是第一章中的东西，此类事情层出不穷。他经常会将一些无关的问题一起处理，即使其中每一个论证可能都是清晰、严谨和漂亮的，但是读者仍会因为其中

缺失连续性而困惑。维纳时常无法抵挡将他快速运转的头脑中的想法与众人分享的诱惑,可他经常无法将相关的数学知识与其学术和社会影响,甚至是个人经历清楚地区分开来。他的通信对象也显得十分随机,有门外汉、数学系大学生、普通数学家,以及他自己本人。

对维纳的了解比弗赖登塔尔更深入的斯特罗伊克(Struik)给出的描述略有不同:“他有着无穷的科学生命力,多年以来似乎从未消失,但这也伴随着极端的敏感……维纳情绪多变,而这也在他的课堂上体现了出来,可以从最差的课到我听过的最好的课。有时他会让听众昏昏入睡,或者在他的计算中晕头转向——他在格丁根大学的表现可谓声名狼藉。但是在其他时候,我曾经见过他的同事们屏息凝听他陈述自己那些精妙绝伦的想法。”

维纳写了许多文章和几本半通俗性的书籍。在这些作品中,他的记忆时常会选择性地运转,但是当他情绪高涨时,他是自己的数学观点的积极传播者。尽管他关于控制论的书一时风头无限,但是它可能只是一些三流作品中的佼佼者,且对他的科学声誉并无用处。他还写了一本“最怪异的”自传,再次引用弗赖登塔尔的话:“尽管它展现了一个极端自我的视角,我却认为这是一个可以接受的、并不唐突的故事,因为它没有半分装模作样的谦虚,自然流露出一种坦率和不造作。总之,显而易见,他对于自己在他人眼中的形象一无所知。”

维纳在1964年3月18日访问斯德哥尔摩的途中因为心脏病发作而去世,享年69岁。人们往往会拿他和另外一位患躁狂抑郁症的伟大数学家西尔维斯特做比较,但是维纳的想法带来了更多的成果,而在他的最佳时期,他也是位更有效率的教师。关于他的那些故事,总是和他的心不在焉、他的缺乏安全感、他的笨手笨脚和他的近视所闹的笑话有关。其中有一个故事是,因为担心可能会失明,他在麻省理工学院的走廊里用摸索的方式练习走路,而当他走进教室时,他会不顾老师和学生的惊异,触摸所有的墙壁。另外一个不知真伪的故事是,有一次维纳一

家在白天搬了房子,而他却回到了原来的住处。第二天在麻省理工学院,他问一个小女孩是否知道维纳一家搬去了哪里。“是的爸爸”,她说到:“我是你的女儿,他们让我来带你回新家呢。”

就研究兴趣范围之广来说,鲜少有现代数学家能与维纳相匹敌。在短短几年中,他对赫维赛德演算、量子力学、微分几何学及统计物理学等科目都进行过认真研究。他的主要手段是傅里叶变换。在他的职业生涯早期,他的研究就已得到认同,他被美国数学学会授予了博谢奖,并被选入了美国科学院;后来他还得到了更多来自美国的荣誉。尽管他在欧洲也很出名,但也许是由于他的极端自我主义,他的研究没有在美国之外得到太多的认同,他在欧洲也没有获得什么荣誉。几年后他从美国科学院辞职了,具体原因不明,但是显然与候选者的拉票活动有关。

在20世纪30年代,维纳对自己数学作品的质量不甚满意,他逼迫同事们确认自己的产出没有减少。他常用的见面语是:“告诉我,我是在退步吗?”人们唯一能给予的回应就是强烈否认;但通常即使这样都不够,不管人们是否知道他在做什么,都要以最强烈的语气来肯定他最近所做的研究。波利亚回忆,有一次维纳在路中间截住了他的车问道:“我真的是个优秀的数学家吗?”波利亚事后说:“你真有什么其他答案可以说吗?我们周围的人都在按喇叭。”再次引用弗赖登塔尔的说法:“从外貌和举止来说,维纳是一个奇形怪状的形象,矮小、圆胖又近视,所有这些和许多其他特性以一种极端的方式结合起来。他的言谈是一种自夸和放纵的古怪结合。他是个糟糕的听众。他的自夸带着玩笑,具有说服力且并不唐突。他会说多国语言,但是没有一门是容易让人听懂的。”

维纳对物理学、工程学和生物学的探索为数学带来了新的问题和见解,而这改变了研究的方向。在其他方面,他用最先进的数学技术为爱因斯坦的布朗运动方程提供了第一个坚实的基础,他还阐明了静电容在拉普拉斯方程解的分析中所起的基础作用。从信号处理的基础概

念出发，他发展出了自己的广义调和分析和他的陶伯定理。这使人们对谱综合有了更宽泛的了解，而这也激励了一代又一代的调和分析学家。维纳关于空间路径的测度，对于从量子理论到应用于经济学或寻找有缺陷基因的随机过程所起到的作用尤其深远——更不用说维纳-霍普夫理论、预报理论及其在电气工程方面的应用了。

亚历山德罗夫(1896—1982)

俄国以外的数学家很少写自传性质的文字，我们在这本书的最后列出几个例子。但是，对俄国人来说，写自传并不是件罕见的事情，而亚历山德罗夫(Pavel Sergeevitch Aleksandrov)的自传是其中最有意思的之一。这本名为《我的自传》(*Pages from an Autobiography*)的书形象地描绘了他人生的主要脉络，事实上此书完成后他的生命也几乎走到了终点。这是本令人着迷的著作，优美的文字被道克(Ann Dowker)巧妙地译成了英文。作为经历了俄国十月革命前后时期的最杰出而有修养的公民之一，他在书中描述本人多舛命运的同时，也清晰地刻画出俄国当时的社会状况。亚历山德罗夫在拓扑学的发展中扮演了重要角色，他的自传和其他一些作品在这方面提供了有价值的视角。不过，他的活动绝不仅仅局限在数学领域，也不限于俄国境内。作为在广泛的文化层面上受过良好教育的人，他可能已在许多领域留下了自己的名字。



帕维尔·谢尔盖耶维奇·亚历山德罗夫于1896年5月7日出生在博戈罗茨克(旧称诺金斯克)。次年，他们一家搬到了位于莫斯科和西欧之间的重要城市斯摩棱斯克。帕维尔小时候，他的父亲谢尔盖·亚历山德罗维奇(Sergei Aleksandrovich)是斯摩棱斯克医院的内科医

生，谢尔盖曾在莫斯科大学学习医学，因为能力突出，获得了留校准备毕业论文的机会。但在上大学的最后一年，他涉嫌参与非法学生组织，结果被威胁不仅可能被学校开除，还会被驱逐出莫斯科。谢尔盖是一名杰出的医生和公众人物。作为一个男人，他对他儿子以后的发展也发挥了重大的影响。帕维尔说他一辈子都会记得他父亲对他说的话："你要爱你的事业，要无私地爱它。要出于爱去为你的事业奋斗，而不是出于对个人成功的期待或者出于为个人带来什么好处。"

亚历山德罗夫的母亲采扎里娅·阿基莫夫娜(Tsezariia Akimovna)来自显赫的波兰兹达诺夫斯基家族。她把全部精力都用于教育自己的6个孩子，亚历山德罗夫是家里最小的一个。她的家族可以追溯到18世纪以前，但在19世纪中叶，一些热衷打猎、不事农耕的小地主成了贫困的家族代表。亚历山德罗夫的外祖父受1863的波兰暴动影响，被迫带着家人匆忙逃到俄国，在那里当了一名地产经纪人，那时候以往逍遥自在的波兰贵族的日子变得不好过了。他女儿采扎里娅在莫斯科知名的菲舍尔女子高级中学接受了很好的古典教育。在那时，这所学校区别于其他女子学校的特征就是，它的课程设置与那些男子学校完全一样：数学、物理、古典语言的课程在这里都有开设。

亚历山德罗夫第一次接触优秀文学作品的经历是源于他的母亲，她先对他大声朗读俄国童话故事及茹科洛夫斯基(Zhukolovski)和普希金(Pushkin)的诗作，后来是读一些俄国经典著作，还有席勒(Schiller)和莎士比亚(Shakespeare)著作的俄文译本。她还鼓励他发展音乐和语言方面的兴趣。亚历山德罗夫可以说流利的德语，并非常热爱德国文学，尤其是歌德(Goethe)的作品。1902年夏天，发生了一件在他生命中很重要的事情：他母亲带他去第聂伯河洗澡，并开始教他游泳。从那天以后，带他去洗澡成了母亲的常规任务，尽可能地一天不落。他很快成了一名游泳高手，而游泳也成了他的日常休闲活动。即便是在俄国的深冬，他也没有放弃，而这一爱好也贯穿了他的生命始终。

在莫斯科，亚历山德罗夫进了一所私立男子中学读书，这里几乎所

有的教师都非常出色。他的数学老师艾格斯(Aleksandr Romanovich Eiges)在他的代数作业上写道:“题目解得很正确很聪明,但在代数中符号也很重要,你对待符号太马虎了。”他总是在符号使用上出错。20年之后,他还记得当年霍普夫是怎么嘲笑他的,并且说同调模就是为了像亚历山德罗夫这样的数学家发明的。作为学校的领导者,艾格斯和校长科罗斯捷洛夫(Korostelof)意识到了亚历山德罗夫的潜力,鼓励他进入莫斯科大学数学系,并在之后继续给予他鼓舞。

于是,亚历山德罗夫在1913年春成了莫斯科大学的学生,他在这里度过了他职业生涯的大部分时间。他的整个学生时代都在做私人家教,因为他相信要靠自己养活自己而不是依赖父母的帮助。虽然他觉得大学课程总体都有些令人失望,但在魅力非凡的年轻数学家卢津(N. N. Luzin)的课上,他还是深受启发。后来他这样回忆说:“卢津的课没有外露的才华和雄辩的策略,他用创造的激情来抓住听众。他拥有非凡的技巧去展示一个数学结论,能让他的听众不由自主地被他带入得出结果的过程中,从而把课堂变成了一种思想的实验室。”

亚历山德罗夫在图书馆里找到了康托尔关于集合论的研究报告,就摆在贝尔关于集合论的著作旁边,这篇研究报告令他印象极为深刻。他在大学的第二年就证明了他的第一个重要定理,确定了不可数波莱尔集是完满集。后来他把这一定理说成是他最出色的成果。许多莫斯科的前辈数学家记得他在学生会数学社团上这么说过。后来很快成为他的密友和搭档的乌雷松(Pavel Samuilovich Uryson)当时也是听众中的一员。

之后,亚历山德罗夫向连续统假设发起冲击,当时人们并不知道这种努力是注定会失败的。久攻不克带来的沮丧使他决定暂时离开莫斯科。随后的一到两年间,他投身于文学课题和剧团事务,但并不是去表演而是当制作人。此时,十月革命正在进行中,这也导致他作为布尔什维克的支持者被监禁了一小段时间。同年的晚些时候,他得了一次长病,直到1920年才重新继续他的研究。这段时间他主要跟他的父母一

起住在斯摩棱斯克,并时不时从这里去一趟莫斯科。

尽管有十月革命后的一段动乱时期,1914 年之后的 10 年对莫斯科的数学家来说在某种意义上是一个黄金时代。卢津这时是数学家中的领军人物之一,他的大型研究团队被人称作卢津小组。亚历山德罗夫也是这个团队中的一员。晚年的卢津因受到迫害而变得很痛苦,但在这段黄金时代中,卢津是包括亚历山德罗夫在内的许多年轻人的启示者。1921 年夏天,包括两位名字为 P. S. 的先生——亚历山德罗夫和乌雷松——在内的一组年轻人在克利亚兹玛河畔靠近莫斯科的布尔科夫镇租了一幢小别墅。就是在这里,乌雷松构想出了他关于拓扑空间维数的定义。他与亚历山德罗夫合著了《紧拓扑空间研究报告》(Memoir on compact topological spaces),其中包含了他们在度量化上的共同成果。对亚历山德罗夫来说,这是一段最为多产的时期。也是在这段时期,他跟他原来的数学老师艾格斯的妹妹结婚,但这段婚姻并未持续很久。同年,亚历山德罗夫成了莫斯科大学的讲师,开始教授当时刚诞生不久的一般拓扑学,以及其他一些课程。

到了 1923 年,德国已饱受恶性通胀的摧残,生活必需品严重短缺。但是它与外界逐渐恢复正常联系的迹象已经初显。在一些地方,德国数学家仍然不受欢迎,但是国外的数学家们开始再次出访德国大学。1922—1923 年的冬季,两位 P. S. 先生决定试着在下个夏天拜访格丁根大学。他们通过授课赚够了钱,在 1923 年 5 月带着卢津的介绍信出发去找克莱因。作为苏联最早出访的数学家,他们受到了克莱因、希尔伯特、兰道、柯朗和诺特最热忱的欢迎,特别源于他们对格丁根大学不甚熟悉的数学领域的造诣。尽管两位来访者参加了希尔伯特、兰道和柯朗的课程,但是令他们印象最为深刻的还是诺特关于理想论的课程。在亚历山德罗夫的自传中,他对当时在格丁根大学的生活给出了一个生动的描述:

从 1920 年到希特勒掌权的 1933 年期间,是格丁根大学数学学派

百花齐放的阶段,这一时期格丁根大学是(国际公认的)全世界数学思想的汇聚地之一;是世界各国各年龄段、不同研究方向的数学家的云集之地,不管在哪个角落兴起的数学理念和发现都会在这里迅速得到交流,而通过这里,这些理念和发现会再次向全世界扩散,随即决定一门又一门数学科目的发展方向。一时间,格丁根大学成为世界上最重要的数学学府之一。

柯朗的数学学派最吸引人的特点之一在于,成员们彼此之间和与他们的领头人之间都保持着亲密友好的关系,从而真正形成了一个团队。但是这个团队又不像一个派别,它的入门条件适用于广泛研究专业和研究方向的数学家们。比如,众所周知,柯朗的学派主要专注于数学物理及其极广泛的应用,而诺特的学派则是抽象代数学派,剥离了应用。无论如何,这两个学派间有着紧密的联系,不单单因为成员间的友好关系,还因为他们明显意识到,这两个学派某种程度上一起代表了当代格丁根大学的数学局面,也许还不仅仅代表格丁根大学。这两个学派的一致性还体现在他们对数学的相同处理方法、他们共有的热情、他们对数学无私的热爱,以及他们将数学视为人类思想最完美的惊人产物的共同认知,而由着这种完美性,数学这一自然形成的统一体,与造就这些学派的数学家们的特殊兴趣和渴望绝不可能相悖。数学那明显对人类有益的独特而固有的完美性,和它那无尽的认知力,是希尔伯特身为一名科学家的信条。这些理念也是柯朗和诺特学派的信条。

在格丁根大学夏季学期的尾声,两位 P. S. 先生参加了一个在挪威的 500 千米徒步旅行,几乎全程赤脚。他们在同年 9 月回到格丁根大学,在环境极佳的图书馆里学习,然后回到了莫斯科。次年 5 月,他们又去了格丁根大学参加夏季学期,之后他们先去波恩拜访了豪斯多夫,然后去布拉里克姆拜访了布劳威尔,布劳威尔开始把乌雷松看作可以继续其拓扑学研究的伙伴,邀请他们次年来待更长的时间。

两位 P. S. 先生离开布拉里克姆去了巴黎,然后到了布列塔尼,他

们在多风雨的大西洋沿岸勒巴茨小镇安顿下来。乌雷松当时正在撰写一些自己的想法。8月17日晚上,在他们到达的几天后,海面变得十分波涛汹涌,但是,在稍加犹豫后,作为游泳健将的他们还是决定下水。他们在开放海域游了一段距离后,一个巨浪将亚历山德罗夫拍回了沙滩,而乌雷松则被打到了岩石上:他受伤严重,而急救措施没能将他救回来。

亚历山德罗夫失魂落魄地回到莫斯科。受好友去世的影响,他在工作中也失去了自我。第二年夏天他回到了布拉里克姆,在布劳威尔的帮助下,他筹备将乌雷松最后的成果出版成书。他也再次去了格丁根大学,希尔伯特请他做了一般拓扑学的讲座,随后他回到了悲剧的发生地勒巴茨。在那里他想到了如何利用由覆盖的神经形成的复形。这种之前在豪斯多夫的章节提到过的,将组合拓扑学和点集拓扑学联系起来的方法,被证明是他此后研究工作的基础。布劳威尔来到勒巴茨加入了他,随后他们一起回到布拉里克姆,亚历山德罗夫接下来的一年都在那里度过。

第二年春天,亚历山德罗夫回到格丁根大学,在那里他第一次见到了德国拓扑学家霍普夫,之后两人建立了紧密的合作关系和友情。霍普夫从柏林大学来到格丁根大学,他从施密特那里了解了拓扑学的最新进展。他在格丁根大学度过了从博士到教授资格考试的过渡学年,在那里他受到了柯朗、希尔伯特和诺特学术圈子的热烈欢迎。亚历山德罗夫和霍普夫,有时候诺伊格鲍尔也会加入他们,会在暑假聚在一起出游,通常他们会去法国。在格丁根大学时,他们俩还会和其他数学家们在空闲时间去附近闲逛或者去河里游泳。亚历山德罗夫在有关霍普夫的回忆录里说,许多数学理念都是这么得来的。另一位定期造访格丁根大学的人是布劳威尔,他还邀请他们去布拉里克姆同住。12月,诺特和她的学生范德瓦尔登去那里住了一个月,而亚历山德罗夫对她那激励性的数学对话记忆犹新。有一次她提出了一个观点,即同调应该被视为一个阿贝尔群的集合,而不单单是一个不变数,即贝蒂数的集

合。这个想法迅速火了起来,但是作为霍普夫的怪癖之一,他不像其他人一样叫它们同调群,却总把它们叫做贝蒂群。

1926 年,霍普夫作为编外讲师回到了柏林大学,上一门由他的学生潘维茨(Erika Pannwitz)编著教材的课程——组合拓扑学。第二年,亚历山德罗夫和霍普夫凭借洛克菲勒奖学金在普林斯顿大学度过,在那里的众多数学家中,他们结识了亚历山大、莱夫谢茨和维布伦。1928 年夏天,当他们回到格丁根大学时,柯朗建议他们为施普林格出版社的“基本数学”系列写一本拓扑学教科书。没有预料到这个项目会占用了他们 7 年的时间,甚至原来预想的三卷本最终也只出版了第一卷。原来的预想是要覆盖整个点集拓扑学和组合拓扑学,但是这个范围实在太大,而且即使不考虑战争的影响,新的发现,特别是组合拓扑学方面的发现,都使工作变得困难。此外,也可能因为霍普夫是一个极度完美主义者。

因此,亚历山德罗夫在 1923 年之后 5 年的大部分时间里都不在莫斯科,直到 1928 年在博洛尼亚召开国际数学家大会。之后亚历山德罗夫开始在苏联待上更长时间。他开始组建自己的研究队伍,而第一个成员就是吉洪诺夫(A. N. Tikhonov);稍后加入的是失明的数学家庞特里亚金(L. S. Pontrjagin),他很快就成为了苏联数学家中的超级明星之一。但当时苏联最好的数学家可能还是柯尔莫戈洛夫,他的简介会在下面给出。他和亚历山德罗夫于 1922 年首次相遇,但他们在 1929 年才更进一步了解了对方,并且建立了毕生的友谊。作为标志性事件,这段友谊从一场为期 21 天、从雅罗斯拉夫尔出发的旅行开始,他们先是坐船沿伏尔加河下行,然后在萨马拉上岸,到达高加索地区和亚美尼亚的凡湖。在湖岸边,亚历山德罗夫和霍普夫一起钻研他们共著的拓扑学教科书的章节,而柯尔莫戈洛夫则在酝酿关于连续时间上马尔可夫过程的连续态的论文,此论文后来成了现代扩散理论的基础。第二年的夏天,他们一起去了格丁根大学,并在法国旅行了一段时间。

1932 年在苏黎世举行的国际数学家大会,在很多方面都标志着一

个时代的终结。亚历山德罗夫借此机会去苏黎世拜访了霍普夫，当时霍普夫刚刚接替了外尔的职位。在大会结束后，亚历山德罗夫和霍普夫结伴去了意大利的湖边，并且还和居住在那里的豪斯多夫一起度过了一段时间。在回莫斯科的途中，亚历山德罗夫在格丁根大学驻足了一下，而这也是他在随后的35年内最后一次拜访格丁根大学；几个月后，纳粹当权，而数学黄金时代就此结束。亚历山德罗夫在柯朗的讣文中写道：

> 格丁根大学生意盎然的数学生活散发着太多光和热，这是一段多姿多彩、充满创造力的快乐生活，然而这一切突然在1933年希特勒夺权后消失殆尽，如同一个邪恶的巫师，一个全人类的敌人，用他的魔爪侵袭了它。战前，我最后一次访问格丁根大学是在1932年。看上去一切如常：数学研究所里的讨论会和授课仍在进行着。柯朗家的音乐晚会也照旧。但是格丁根大学，乃至整个德国都已处于恐慌的氛围中，似乎有些诡异而邪恶的情况正在发生着。希特勒青年团已经在街上游荡和高歌。显而易见，一场政变即将开始，而对我来说也是时候回家了。

1935年，亚历山德罗夫和柯尔莫戈洛夫的生活迎来了一个重大事件——他们获得了靠近波尔谢夫的卡马罗夫卡小镇的一座旧庄园建筑的一部分。亚历山德罗夫回忆道："在卡马罗夫卡的房子满足了我们所有的需求：有房间可以用作大图书馆，我们也可以让客人住在独立的房间里，几天或者长期都行。"亚历山德罗夫和柯尔莫戈洛夫都是体育运动的忠实拥护者；客人们发现他们每天早晨都会尽量赤足跑一千米，"如果天气不是太寒冷的话他们只穿着短裤"。霍普夫一家在1935年的国际拓扑学大会上与他们同住，之后他们一起去克里米亚度假。在雅尔塔，亚历山德罗夫和霍普夫最终完成了第一卷，而最终也是唯一的一卷《拓扑学》(*Topologie*)。之后的15年他们没有再见面。

当苏联于1941年加入到第二次世界大战后，亚历山德罗夫和柯尔

莫戈洛夫两家人和其他知识分子一样被疏散到喀山，但是他们次年又返回了莫斯科。亚历山德罗夫的学术生涯随着乱世继续饱经挫折，但当战争结束的时候，尽管只有50岁的年纪，他却感到自己作为研究型数学家的巅峰时期已经结束了，他越来越多地享受他现在及以前的学生们带给他的赞颂。他当年毕业的时候原本就计划做一个教师，对于他来说，教学至少与研究一样重要。

亚历山德罗夫个性鲜明，为人慷慨，感情丰沛，充满魅力，但如果有必要，他也会体现出坚定和执着的一面。众所周知，他是一个多才多艺的人，特别是在文学和音乐方面颇有造诣，他是一位成功的剧作家，还有许多专长。写作回忆录是他一直保持的兴趣，除了与霍普夫合著的经典著作，他很少写说明性的文章。他细心地描述师生之间的情谊。在苏联，他被冠以"社会主义劳动英雄"的称号，至少6次获得列宁勋章，还有十月革命勋章、红旗勋章及其他各式各样的勋章与奖章。在苏联之外，他是多个科学院的成员。备受尊敬和爱戴的亚历山德罗夫于1982年11月16日去世，享年86岁。在他生命的最后3年里，他已经完全失明。

亚历山德罗夫起了重要作用的莫斯科数学学派是苏联的顶尖学派，特别是在20世纪上半叶，很多人说它堪比格丁根大学的数学学派。这两个团体都有强烈的社会意识和博爱精神。不过，格丁根学派的顶尖数学家都出生于19世纪，而莫斯科学派的大部分人都不是。苏联时期政治上的干扰，及随后的经济危机，尤其是两次世界大战的影响，意味着它就像格丁根学派一样，在许多方面注定是个悲剧。

扎里斯基（1899—1986）

20世纪初，世界上超过一半的犹太人居住在俄国的疆域内，其中最大的一支被安排居住在白俄罗斯和波兰东部的犹太人定居点，那时这些地方都属于俄国。沙皇的反犹太主义是基于宗教，而不是像在德

国那样基于种族。信仰犹太教的人被剥夺了大部分公民权利，但皈依东正教的人却能享受到和其他基督徒一样的权利。在限制措施中，有一项是对犹太人进入中学或者大学采取配额制。在首都，配额为高中5%、大学3%，其他地方则是高中10%、大学5%，而在犹太人定居点，配额提升了5个百分点。



在众多俄罗斯裔的著名数学家中，有几个人在研究生涯的早期就移民到了美国。莱夫谢茨的故事前面已经讲过了，下面我们将讲述另一位，他就是奥斯卡·扎里斯基(Oscar Zariski)。这两位俄国-美国人有很多相同之处，但是他们的人生故事却大相径庭。扎里斯基是他同代人中最重要的代数几何学家，他常常说："几何是真实的生活"。扎里斯基，这个我们即将认识的人，1899年4月24日出生于白俄罗斯的大城镇科布林。他是贝扎列尔·扎里斯基(Bezaliel Zaritsky)和汉娜·扎里斯卡娅(Hannah Zaritskaya)的第六个孩子和第三个男孩，他们给孩子取的第一个名字叫做阿舍尔(Ascher)。他的父亲是一个学者，为了逃避兵役而服用毒药，导致健康受损。他的母亲是一个成功的客栈老板的女儿，充当女房东的角色。1901年贝扎列尔死后，他有钱的哥哥帮助维持这个家庭的生计，那时他们并不贫穷。

俄罗斯的犹太人大部分讲依地语。这位未来数学家的母亲请了一位家庭教师教她的孩子俄语和算术。奥斯卡是个机敏且渴求知识的学生。当俄国沙皇下令将犹太人进入高中的配额增加一倍时，奥斯卡被允许进入一个距离科布林有些路程的学校，在那里度过8年之后，老师们对他的能力留下了深刻印象，鼓励他到大学深造，这意味着他必须皈依基督教。这被他拒绝了，因为他已经成为一个无神论者和马克思主

义者，他从来没有对犹太人的信仰和文化感兴趣。

俄国参加第一次世界大战时，这位年轻人向东去到乌克兰的奥涅尼格，1918 年，他在乌克兰的首都基辅进入基辅大学。因为数学系没有名额，他不得不先选修哲学，但后来他成功地转到了数学系。这时，革命势力已羽翼丰满。扎里斯基为当地的一家马克思主义报纸撰文，并在一次冲突中受伤。这时，他的父母在经济上受到重创，已经不能再为他提供金钱上的支持了。

看到苏联的各种不稳定因素，扎里斯基决定移民。意大利是他选择的目的地，因为那里的生活成本很低，而且意大利的大学不向外国人收取费用。他通过适当的贿赂获得了波兰护照，一到意大利就在比萨大学学习。但是他发现这里的数学研究比起基辅大学来差很多，所以他一有机会就转学到了罗马大学，当时那是世界上数学领域最顶尖的大学之一，特别是在代数几何方面。那里最著名的几何学家是卡斯泰尔诺沃和塞韦里，前者成为了扎里斯基正式的导师，但是比起他本人，他的内弟、好友及合作者，更加平易近人的恩里克斯更多地承担了扎里斯基导师的角色。但之后，扎里斯基把恩里克斯对待严格证明的满不在乎的态度看作意大利学派终结的开端。恩里克斯会说：“我们贵族不需要证明，证明是对于你们平民而言的。”

扎里斯基陷入了极度贫困之中，以至于只能到处对表达慷慨的友好意大利人进行不断感谢。正当贫困潦倒之时，他结识了一位犹太裔的意大利文学系学生约尔 · 卡利(Yole Cagli)，她的家族来自亚得里亚海的港口城市安科纳。她教他意大利语，他以教她俄语作为回报。不久之后他们就订婚了，他们的婚礼 1924 年 9 月 11 日在科布林举行。他和约尔都以教学为生，此外，他们在科布林的家族生意也得以恢复。

此时，恩里克斯的主要兴趣在哲学和自然科学史方面。在他富有同情心的指导下，扎里斯基完成了他的博士论文，主题是用根式解多项式方程。“扎里斯基，你虽然跟我们一块儿工作，但你不属于我们中的一员”，卡斯泰尔诺沃的话并非不和善，他只是针对扎里斯基对学术严

谨性的坚持,以及扎里斯基认为意大利学派使用的研究方法已日趋僵化,不再适应其未来对代数几何领域的研究。他鼓励扎里斯基研究莱夫谢茨的创新工作,此人在证明了代数几何可以用代数拓扑的方式研究后便去了普林斯顿大学。扎里斯基充满热情地投入研究,并在其影响下写了几篇组合拓扑学研究论文。

后来扎里斯基说:"很遗憾,我的意大利老师从没有跟我提到与代数几何相关的代数学进展竟然有那么多,当我多年以后到了美国时才开始了解这些。"这一时期德国和意大利数学学派之间的联系非常少。部分是为了弥补这一不足,塞韦里让扎里斯基将戴德金的一些作品翻译成意大利文,而恩里克斯请他对集合论写一些说明性的文章。扎里斯基陷入到繁忙之中,他的妻子约尔也全职上课。1925 年,他们的第一个孩子拉斐尔(Raphael)出生了。

此时法西斯已经掌权,墨索里尼(Mussolini)成为了独裁者,像之后德国发生的一样,反犹主义开始甚嚣尘上。不同的意大利数学家对此反应不一。比如,塞韦里选择与当局合作,然而卡斯泰尔诺沃 1935 年便从罗马大学退休,数年之后成为了反对墨索里尼种族歧视政策的领导者。他组织并领导了一个小规模的"秘密大学",面向那些被新的法律排除在大学门外的学生,其学位由瑞士的弗赖贝格理工学院授予。这所学校从 1940 年开办到 1942 年,大约有 40 名学生被录取。在德国占领罗马期间,卡斯泰尔诺沃躲了起来,但战争一结束,他便主导重建那个曾经在世界上名列前茅的科学院,并作为终身参议员,在国家事务中起着作用。

扎里斯基开始怀疑继续在意大利长时间逗留是否明智。仅仅在一年之后,他就在罗马开始接受洛克菲勒国际教育委员会的资助,但他需要一个稳定的教职。他考虑过返回苏联去,但听说尽管他具有马克思主义背景,但像他这样的侨民仍然不受欢迎。事实上,在斯大林主义的压迫之下,乌克兰的情况令人沮丧,他还听说自己的母亲和其他亲人都死于饥饿。他决定尝试移民到美国去。

莱夫谢茨和扎里斯基有许多共同点，但莱夫谢茨比扎里斯基大15岁，并已在美国站稳了脚跟。在经历多番尝试后，扎里斯基向莱夫谢茨询问在美国是否有什么适合他的工作。结果是霍普金斯大学提供了1927到1928学年的奖学金。扎里斯基接受了它，但不走运的是，因为签证问题，约尔和拉斐尔不能到巴尔的摩与他相聚。他发现霍普金斯大学"非常沉闷"。在莱夫谢茨的介绍下，他在普林斯顿大学讲授了一些关于自己最新研究领域的课程，并充满热情地给约尔写信："我在这里工作得很愉快——这是一个为学术而建立的小镇，完全被漂亮的大学建筑所占据。小镇的景色引人入胜，在厌倦了巴尔的摩单调的街头之后，这里展现的多姿多彩的街景，最终让我的眼睛找到了安宁。莱夫谢茨对我很好，我们已经成为了朋友。"塔克在他的回忆录中谈及莱夫谢茨和扎里斯基的一次讨论："莱夫谢茨认为代数几何是拓扑学的分支，但扎里斯基认为它是代数的分支。于是扎里斯基开玩笑般地问莱夫谢茨：'你如何区分代数和拓扑学？'很快，莱夫谢茨回答道：'如果只是转一下曲柄，那么它是代数，但如果是得出一个主意，那么它是拓扑学。'"

在霍普金斯大学第一年的年末，扎里斯基被任命为副教授。这大大增加了约尔和拉斐尔拿到美国签证的机会。扎里斯基返回意大利与他们相会，当他面见美国领事时，签证也就搞定了。家人一到巴尔的摩与他相会，他便觉得很开心。1932年，约尔生下了他们的女儿薇拉(Vera)。随着大有前途的荷兰年轻拓扑学家范坎彭(E. R. van Kampen)的到来，霍普金斯大学数学系的教师队伍逐渐壮大，但不幸的是，几年之后他便因脑肿瘤而去世。

扎里斯基被诺特的现代代数学吸引，不是为了其本身，而是因为它为代数几何建立了一个适当的基础。他能够同时采用莱夫谢茨创立的拓扑学方法，以及格丁根学派创立的代数方法。随着他关于代数曲面的学术著作的发表，扎里斯基工作的重要性变得家喻户晓。1934—1935年他在普林斯顿新成立的高等研究院做访问学者，在那里他结识

了外尔及其他一些德国移民。1935年，扎里斯基回到苏联参加莫斯科拓扑学大会。这是他直到第二次世界大战结束前最后一次访问欧洲。第二年，扎里斯基成为了美国公民。他开始在美国数学界扮演更重要的角色——例如，他成为了《美国数学月刊》的编辑及《数学纪事》的副编辑。1942年，他当选华盛顿科学院院士。1941年前后，在普林斯顿大学举办学术报告会之后的附加讨论中，硕果累累的"扎里斯基拓扑学"诞生了。

第二次世界大战结束后，扎里斯基在圣保罗度过了丰收的一年，韦伊也正在那里访学。与此同时，其他大学的邀约也纷至沓来。起初，扎里斯基想以此说服霍普金斯大学减轻他的教学压力，以便集中更多精力于研究，但没有成功。他开始考虑是时候离开了。1947年，他收到了从加州理工学院发来的十分吸引人的邀约，他很快就接受了，但随后他又接到了一个更吸引人的邀约，来自哈佛大学。虽然处境略显尴尬，他还是说服加州理工学院解除了合约，使他得以接受哈佛大学的邀约，这是一个正教授的职位。他是第一个在哈佛大学数学系担任教职的犹太人。他去那里后，约尔被说服放弃了她教授初级意大利语的工作，成了像其他哈佛妻子一样的角色。事实上，扎里斯基很享受老派的正规社会生活，而在哈佛大学恰恰是如此。扎里斯基在哈佛大学非常成功。他被证明是一名出色的教师，以严谨著称，并开始吸引优秀的研究生。这其中就有他最终的继任者泰特(John Tate)。还有日本著名几何学家广中平祐(Hironaka)，他是第一个展示了高维中奇性的分解的人。需要说明的是，由于技术原因，广中平祐仅仅以本科生名义进行了注册。

扎里斯基自然而然地参与到1950年在马萨诸塞州剑桥市举行的国际数学家大会，他对众所周知的法西斯主义同情者塞韦里受到冷遇感到很开心。有一年，扎里斯基在耶鲁大学为美国数学学会举行了一次学术讲座。在哈佛大学，他自己组织的学术讲座很快成为了著名的研讨会。据本书作者回忆，有一次讲座是格罗滕迪克(Alexandre Grothendieck)带来的，他强有力的新创理论对代数几何具有革命性的

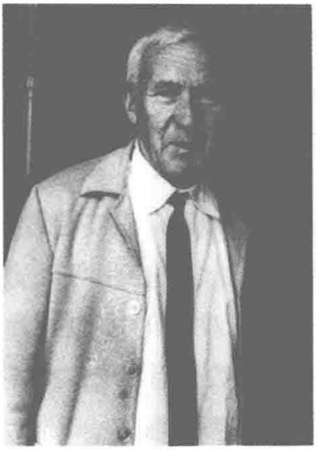
作用，在很大程度上超越了扎里斯基本人的理论。带着很强的幽默感，扎里斯基向格罗滕迪克提出挑战，让他使用他已经阐明的成熟抽象方法去证明一个特定的基本结果，格罗滕迪克毫不犹豫地完成了，给人留下了深刻印象。

1964年4月，时年65岁，过了常规退休年龄的扎里斯基被哈佛大学邀请延长5年教职，他以半工半薪的方式继续其工作。在此期间，他成为了美国数学学会主席，这时美国社会已进入泛政治化时期（扎里斯基对此很反感）。在他75岁生日之际，哈佛大学数学系在公共休息室立起一尊他的青铜半身像。不久之后，他的健康急剧恶化——起初是听觉失灵，随后出现了后来被诊断为阿尔茨海默病的症状。1986年7月4日，扎里斯基在家中去世，享年87岁。

柯尔莫戈洛夫(1903—1987)

在20世纪，大部分的数学家都是专业人员。一般而言，由于这个学科如此壮大，且发展得如此迅速，极难对其不只一个分支做出贡献。不过也有例外，我们最后两份传略中的数学家，一位匈牙利人和另一位俄国人，都是能够对这一学科中并无密切联系的多个分支做出杰出贡献的人。安德烈·尼古拉耶维奇·柯尔莫戈洛夫（Andrei Nikolaevich Kolmogorov），1903年4月25日出生于坦波夫，那是他的母亲玛丽亚·雅科夫列夫娜·柯尔莫戈洛娃（Mariya Yakovlevna Kolmogorova）与朋友们从克里米亚返程途中逗留的俄国小镇。他的父母没有正式结婚。玛丽亚死于分娩之中，她的儿子安德烈即刻被她的妹妹薇拉·雅科夫列夫娜·柯尔莫戈洛娃（Vera Yakovlevna Kolmogorova）所收养。她将所有的母爱都倾注在这个外甥身上，而安德烈也回报以作为儿子的所有关爱。她一直活到1950年，因此曾目睹柯尔莫戈洛夫最伟大的一些成就。

在俄国之外，安德烈总是以他那曾经是乌格利奇贵族首领的外祖



父雅科夫·斯捷潘诺维奇·柯尔莫戈洛夫(Yakov Stepanovich Kolmogorov)的姓氏闻名于数学家之间。柯尔莫戈洛娃姐妹,玛丽亚、薇拉和娜杰日莎(Nadezhsa)都是抱有自由主义政治观念的独立女性。早年间,玛丽亚和薇拉都曾经被捕,在圣彼得堡被关押数月。柯尔莫戈洛夫一家住在图诺什纳村(邻近伏尔加河畔的雅罗斯拉夫尔),那个安德烈度过了童年的地方是一个地下印刷中心,据家族资料记载,不时有盗印资料藏在其摇篮之下。而这位未来数学家的父亲尼古拉·马特维耶维奇·卡塔耶夫(Nikolai Matveevich Kataev),据我们所知是一位牧师之子,后成为一名训练有素的农学家,曾被流放到雅罗斯拉夫尔,革命之后他成为农业部的培训负责人,在1919年的战争中亡于南方前线。

最初柯尔莫戈洛夫在家接受教育,但1910年薇拉将他携至莫斯科,他进入了一所由一群民主知识分子创建的私立文理中学。后来他用"精彩"一词形容这所学校,并回忆道:

班级很小(仅15—20个学生)。相当大一部分的教师对自然科学着迷。有时会来一些大学教师,而我们的地理老师本人也参与了富有意趣的探索。许多学生在独立学习课外材料时相互竞争,有时甚至暗中盘算要用他们的知识去羞辱那些资历尚浅的教师……我是班里数学最好的学生之一,但对我来说,在学校里更喜爱的主要课程起初是生物,后来是俄国史。

1918—1920年,在莫斯科的生活并不容易。只有最坚韧的人还在学校认真学习。那时我不得不和一些高年级学生一起出去修筑铁路。同时我继续自学,准备参加高中毕业考试。回莫斯科后我感到失望;他们连考试都没有让我参加,而只给了我一张毕业证书。

1920年，柯尔莫戈洛夫成为莫斯科大学数学系学生，但同时辅修冶金课程。另外，他还参加了一个俄国史的研讨班，在那里，他发表了自己的第一项研究成果——关于15、16世纪诺夫哥罗德的土地所有权。老师对该作的反馈是："在你的论文里，你只给我们提供了一条证据，这在你研究的数学领域可能足够了，但是我们历史学者更喜欢把握10条以上的证据。"后来，一个考察团确认了柯尔莫戈洛夫对那里土地归置方式的猜想。

第一学年考试通过后，柯尔莫戈洛夫获得了面包和奶酪的免费配额，再加上一些微薄的助学金，但他还需要额外的钱。他在一所实验学校谋得教授数学和物理学的工作，亦在该校任校委会秘书和寄宿生导师。在大学里，他经常参加高级课程和研讨班。其中一门课由拓扑学家乌雷松所开设。当柯尔莫戈洛夫发现一个证明中的一处错误时，乌雷松邀请这位18岁的少年与他一同研究。柯尔莫戈洛夫回忆道：

> 那时候莫斯科有很多才华横溢的数学家。但即便是在这样的背景下，乌雷松仍然能够脱颖而出，他凭借的是：在研究课题选择上将个人兴趣与明确目的结合在一起，对问题陈述清晰明了（尤其对我而言，当他认为他自己对我的工作方向负有引导责任时），以及对他自己与他人研究成果的清晰评价，还有对年轻人成果的善意态度。

亚历山德罗夫、卢津、苏斯林（Suslin）与乌雷松纷纷以各种不同的方式帮助并鼓励柯尔莫戈洛夫早期的数学研究。1922年，他提出了法国人和俄国人对于点集的描述性理论工作的一个综合分析，同年他构造了他那个傅里叶级数几乎处处发散的可和函数的著名实例。19岁的柯尔莫戈洛夫一举成为国际名人，而当他将这一结果中的"几乎处处"优化为"处处"后，则声名更甚。

1925年，柯尔莫戈洛夫成为卢津指导下的研究生。四年之后，他

以自己的18篇数学论文崭露头角，其中包括他的关于强大数律和叠对数律的表述，一些微分和积分运算的推广，以及直觉主义逻辑方面的贡献。他在最后一个主题上的两篇论文为该领域的专家们所推崇。1929年6月，柯尔莫戈洛夫担任了莫斯科大学数学力学研究所的研究职位；两年后他晋阶为教授，又两年后成为数学科学研究所所长。这时正处于莫斯科数学的黄金时代，而柯尔莫戈洛夫本人对此贡献良多。

虽然他的整个生涯大多是在莫斯科度过，柯尔莫戈洛夫还是喜爱俄罗斯的乡村，正如我们在亚历山德罗夫的传略中看到的那样，两位数学家相伴而行的一次长途旅游成为他们长期友谊的开始。在柯尔莫戈洛夫80岁生日时，比他大7岁的亚历山德罗夫这样描述道：

> 我与柯尔莫戈洛夫的友谊在我的生命中占有非常突出而特殊的位置：这段友谊到1979年已经持续50年，并且在这半个世纪中一直没有分裂的迹象，也没有任何争吵相伴。在这期间，我们在任何就我们人生观而言的重要问题上都没有误解。即使当我们对一些问题的看法不一致时，我们也以完全理解与相互赞同去面对它们。

柯尔莫戈洛夫对他们友好岁月的感触同等地热情："它们是我为何一生都幸福满满的原因。这种快乐的基础是与亚历山德罗夫一起不停歇地深入思考，"他继续说道，"我很可能凭一己之力成为一名数学家，但是我的人格品性则是在亚历山德罗夫相当程度的影响之下形成的。就其观点的深度和广度而言，他不仅在这里，而且在全世界都实在是一位令人惊异的人。他的音乐和绘画知识，他对人的真诚关心，都是非凡的。"

1920年代末到1930年代初，柯尔莫戈洛夫的数学活动迅速拓展。他发表了关于基础概率论本身的一个初次尝试工作。这一工作后来发展成他的专著《概率论基础》(*Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*)，这是他在一条小河岸边的树林中写成，并于1933年在柏林出版

的。他的目标是为概率论创立一个公理基础,在前言中他评论道,没有勒贝格测度和勒贝格积分,这一任务无望完成。

1930 年6 月到1931 年3 月,柯尔莫戈洛夫和亚历山德罗夫到德国(柏林、格丁根、慕尼黑)和法国(巴黎与地中海沿岸)进行了一次长时间的科学访问。他们与那时正在研究马尔科夫链的弗雷歇一起,在海边度过了"极其单调的一个月"。此后柯尔莫戈洛夫去了巴黎,自然地将兴趣投向"我的工作在那里被如何评价,并就如何继续我的工作征求老一辈数学家如博雷尔和勒贝格的建议。但我和他们的接触,哎,仅限于少数几次官方访问。"

柯尔莫戈洛夫最出色的工作均与分析学有关,从不涉及代数、几何或数论。他对创建随机过程理论或多或少有所贡献。他对天体力学和湍流理论的贡献是奠基性的。不过,他的贡献远不止这些。例如,第二次世界大战期间,他彻底改变了弹道学理论,之后又为信息论建立了数学基础。他几乎对每个科学分支都做出过重要贡献。像很多俄国人一样,他对诗歌抱有浓厚兴趣。他还对文献学、语言学、散文和诗歌格律,以及民族语言进行了统计研究。对他来说,这是他在应用数学方面工作的一个严肃且重要的组成部分。

在其研究生涯的所有阶段,柯尔莫戈洛夫总是同时忙于许多领域,这种状态甚至一直持续到他晚年。例如,他曾对数学教育的兴趣日益浓厚,在莫斯科大学资助的为有天赋的儿童开设的一所特殊学校里,他承担了大量职责。多年间,他为该校投入了一大部分时间,用于准备课程大纲、编写教材,并和孩子们一起度过大量的教学时间,向他们介绍文学和音乐,参加他们的课外活动,并带他们野营、远足和探险。柯尔莫戈洛夫希望确保这些孩子在人格方面有全面而自然的发展,至于学校里的这些儿童是否能够成为数学家,他并不在意,无论他们最终从事何种职业,只要他们的视野保持开阔且好奇心不被束缚,他就会满意。

1939 年,柯尔莫戈洛夫当选苏联科学院院士,之后又成为该科学院的主席团成员。他也被任命了许多其他专业性部门的职务。1942

年,他与安娜·德米特列夫娜·叶戈罗娃(Anna Dmietrievna Egorova)结婚。1980年之前他都非常健康,但此后便开始衰退。因为青光眼,他几近完全失明。他患上了帕金森氏病;很长一段时间里,他失去了说话能力。在给他研究生们的最后一则动人留言中,他交给他们为年轻一代的更好教育而继承其工作的特殊责任。这位苏维埃时代最伟大的俄国数学家于1987年10月26日辞世。毋庸多言,柯尔莫戈洛夫获得过很多的荣誉和勋章。他是社会主义劳动英雄,被授予列宁勋章不下7次。他也获得过列宁奖和罗巴切夫斯基奖。在其他国家,他也曾被授予许多大学荣誉博士学位和学会会员资格。

冯·诺伊曼(1903—1957)

在第一次世界大战前后的20年间,布达佩斯被证明是一块特别适合科学天才生长繁育的地方。亚诺什·冯·诺伊曼(János von Neumann)或许是这些科学家群星中最耀眼的那一颗。当被问到他自己关于这一现象的看法时,他说这是若干文化因素作用在一起引发的巧合,他也不能确切地解释。这些因素可能包括中欧一些地区的全社会的外部压力,个人潜意识里的不安全感,以及产生不寻常事物或者濒临灭亡时的迫切需求。第一次世界大战打破了原有的经济和社会形态。布达佩斯作为奥匈帝国副都曾有过辉煌的历史,但在这时它只是一个小国家的主要城市。很明显,对许多科学家来说,只能通过移民去找一个较少束缚、更乡村一些的环境生活。



冯·诺伊曼,三兄弟中的大哥,1903年12月28日出生于布达佩斯。他家境小康,父亲马克斯·诺伊曼(Max Neumann)是一个犹太血

统的抵押贷款银行家。母亲玛吉特[Margit,娘家姓卡恩(Kahn)]也来自一个富有的犹太家庭。他们的儿子小时候由一名女家庭教师负责教育。第一次世界大战爆发的1914年,冯·诺伊曼10岁,他进入了路德中学——一所很好的教会文理中学学习。为了免受愈演愈烈的反犹太潮流的冲击,诺伊曼一家成了有名无实的罗马天主教徒。他的姓氏改成了"诺伊曼·冯·玛吉塔"(Neumann von Margitta),而名字中的亚诺什一直沿用到他27岁去美国的时候。后来他为了方便开始自称约翰·冯·诺伊曼(John von Neumann)。

在中学里,冯·诺伊曼异乎常人的数学天赋被很早发现了,他除了学习正常的课程外,还由布达佩斯大学的塞格(Gábor Szegõ)单独指导。1921年中学毕业后,他在布达佩斯大学注册成为了一名数学系学生,但他接下来四年中的大部分时间都泡在苏黎世联邦工业大学和柏林大学。他父亲看着他在化学工程方面开创了自己的事业。他在布达佩斯大学拿到了数学博士学位,同时也在苏黎世联邦工业大学拿到了化学工程学士学位。在联邦工业大学,冯·诺伊曼跟随波利亚学习,波利亚这样描述他:"他是唯一一个让我有威胁感的学生。他进步太快了……我提到某一个理论,告诉他这个理论还未被证明,可能挺难的。冯·诺伊曼一句话没说,过了五分钟他举手示意我。我点了他名字,他就来到黑板前,把刚才那个理论的证明推导了出来。从那以后,我就怕了他了。"冯·诺伊曼还是外尔的弟子,有一次,外尔有事要离开苏黎世一段时间,冯·诺伊曼就去替他上课。

在中欧,尽管在原创数学研究领域中,早熟并不是很稀罕的事情,但冯·诺伊曼在年轻的奇才们当中仍然是异于他人的。他拥有过目不忘的本事,几乎所有的事情都能回忆起来。比如,他对历史事件的细节有着百科全书般的知识。他能讲流利的英语、法语、德语和匈牙利语。学生时期,他就出版了原创作品。1926年他造访格丁根大学,深深打动了希尔伯特,同时他也对年轻的物理学家海森伯(Heisenberg)印象深刻。次年,他成了柏林大学的编外讲师,并在这个职位上呆了三年,

在此期间，他以几乎每月一篇的速度发表重要论文。在柏林，他是个著名的享乐主义者，是这座城市声名狼藉的夜总会的常客。

也是在这段时期，冯·诺伊曼因为在数学领域三个截然不同方向上的成就，逐渐拥有了国际声誉。一个是博弈论，博雷尔晚年的兴趣所在，而冯·诺伊曼在晚年再次对此感兴趣。另一个是当时有高度争议性的集合论基础理论。但是现在回想起来，最重要的成就或许要数他在量子力学的数学基础方面做出的贡献。量子力学在1925年被海森伯等人发现之后的最初几年，该理论十分幸运地吸引了冯·诺伊曼这样水准的数学天才的兴趣。于是，量子力学理论的数学框架被搭建出来，它全新的解析规则的正式面貌被研究出来，而这一切都是冯·诺伊曼一个人在区区两年时间内完成的。在这个数学与物理之间相互作用的显著范例上，冯·诺伊曼引入了算子理论这一数学探究领域。在这个领域，他取得了许多最卓越的成就。近期，冯·诺伊曼代数在完全不同的情境下再现了，被称为纽结理论。

1929年，冯·诺伊曼转到了汉堡大学，继续担任编外讲师，并于1930年以普林斯顿大学访问学者的身份第一次来到美国。这给他带来了于次年担任普林斯顿大学客座教授职位的机会。又两年后，他被任命为普林斯顿高等研究院的教授，成为了那里最年轻的编内员工。1930年，冯·诺伊曼迎娶了才华横溢的玛丽埃塔·克韦希(Marietta Kovesi)，她当时在布达佩斯大学学习经济学，并且是当时匈牙利首都社会生活中的重要人物。他们的女儿玛丽娜(Marina)在1935年出生。但不知道到底哪里出了问题，他们1937年分居了，最终这段婚姻以离婚收场。

1939年，冯·诺伊曼在对布达佩斯大学的夏日访问期间又一次结婚了，并把第二任妻子克拉里·丹(Klari Dan)带回了普林斯顿，后者刚刚接连与两任丈夫离婚。之后，她成为了首批为电子计算机编制数学问题代码的编码员之一。直到欧洲的大战开始之前，冯·诺伊曼一直定期地开办令人激动的讲座课程，涉及希尔伯特空间、测度论、算子

环和连续几何等非常热门的话题。在研究工作中,他的兴趣范围十分广泛,从关于李群的希尔伯特第五问题到流体力学中出现的非线性微分方程都有所涉及。但到了1937年,他的研究工作开始更多地向应用数学方向转移,他坚信当下一场战争爆发时,他的工作会十分有用。正如他所坚信的那样,战争真的发生了。直到第二次世界大战爆发前,冯·诺伊曼通常都会回欧洲消夏,但战争爆发后,他再也不愿意离开美国。随后,他的寡母和他的小兄弟迈克尔(Michael)、尼古拉斯(Nicholas),还有他妻子的父母都来到美国投奔他。但他的岳父自杀身亡,之后他的岳母很快又回到了匈牙利。

从1940年起,冯·诺伊曼越来越多地介入到有关战争的工作中。开始时,他主要涉及弹道学和爆炸产生的冲击波。但在1943年他加入了一项重要工作,那就是开发原子弹的曼哈顿计划。他受雇于洛斯阿拉莫斯的奥本海默(Oppenheimer)团队。在那里,他与另外三名匈牙利物理学家维格纳(Wigner)、西拉德(Szilard)和特勒(Teller)一起工作。他最后的重要著作是1944年与奥地利经济学家摩根斯顿(Oskar Morgenstern)合著的非常具有影响力的《博弈论与经济行为》(*The Theory of Games and Economic Behavior*)。完成这本书后,他把注意力转到了电子计算机上。他相信有了计算机的帮助,数值计算方法可以解决任何类型的问题,并决定自己设计一台计算机。在晶体管投入使用之前,这样一台机器会填满整个房间,并且他还要面对大部分研究院成员对这个想法的强烈反对。幸好当时的院长艾德洛特(Frank Aydelotte)和德高望重的老前辈维布伦有更远大的眼光,在他们的支持下,这台具有历史意义的机器被建造了出来。这台机器刚成功运行起来,冯·诺伊曼就把目光投向了自动机理论,这台机器正好是个非常好的范例。

早期时候,普林斯顿高等研究院的到访者们发现这里有着不拘小节但非常热情的科研环境。维布伦等人负责活跃社交氛围,但亚历山大和冯·诺伊曼等人的家也经常成为社交聚会的场所。尽管冯·诺伊曼常被看到在热闹的聚会上还在研究这样那样的问题,但其实他很喜

欢跟人群混在一起，也很爱听八卦。在人群中，他非常健谈。在他对抽象思维的热爱之外，他对更世俗化的喜剧和幽默也有着强烈的兴趣。当还是个年轻人的时候，他会说，基本的数学思维能力会在26岁后开始衰落，但是由经验积累出的某种平庸的精明可以弥补这种逐渐的衰落，至少在一段时期内可以。后来这个年龄限制慢慢地被放宽了，但他曾经担心他的声誉会无法经受时间的考验。他年轻时身材纤细，而且据说行为举止多少有些粗俗。后来他变得越来越富态，走路时迈着小步子，时不时地小跑几步，但从来不会跑得很快。他变得彬彬有礼且充满自信，总是穿着一套西装，看上去像个银行家一样。

从1944年开始，冯·诺伊曼的活动方式开始变化。他很快成为了最忙碌、最受美国军方和其他一些组织欢迎的咨询顾问。他越来越多地被邀请去为一些与军事项目或核能利用相关的国家委员会服务。他开始觉得普林斯顿高等研究院对于他多样化的活动来说并不是一个令人满意的基地，尤其是这里无法提供实验工作所需的设施。他开始筹备转到加州大学去，但他不可思议的精力已经开始衰退，而他的生命也即将过早地走到尽头。

冯·诺伊曼一直都很健康，直到1955年的X光检查发现他得了无法手术治疗的癌症。很多人都认为他得这种病与他参与了1946年比基尼环礁的核试验有关。漫长而无情的疾病逐渐终止了他所有的活动，他于1957年2月8日在华盛顿逝世，享年53岁。此前一年他获得了自由勋章、爱因斯坦纪念奖和费米奖，又充实了他长长的荣誉清单。1951到1953年，冯·诺伊曼出任美国数学学会主席一职。早些时候，他被学会授予了博歇奖，并获得吉布斯讲席和学术研讨会讲席。早在1937年，他就被选入了美国科学院。

在他特别多才多艺且富有创造力的职业生涯中，冯·诺伊曼展现了对逻辑性、公理化、形式化问题的终身投入。他的各项贡献并非同等地意义深远；他自己认为他最顶尖的工作是在遍历理论和量子力学的数学基础中。依仗着数学家的思维，他广泛的兴趣包含了数学可以被

有效应用的各种各样的情形。在这个方面,他可以与本书第一份传略的主角欧拉相提并论。所以,把冯·诺伊曼作为本书最后一份传略的主角简直再合适不过了。

后记

在本书目录中,所有的传记人物都是按出生年月排列顺序。下面仍是这些人物,按去世年月重新排列顺序。

欧拉(1707—1783)
达朗贝尔(1717—1783)
拉格朗日(1736—1813)
蒙日(1746—1818)
拉普拉斯(1749—1827)
阿贝尔(1802—1829)
傅里叶(1768—1830)
热尔曼(1776—1831)
伽罗瓦(1811—1832)
勒让德(1752—1833)
泊松(1781—1840)
雅可比(1804—1851)
高斯(1777—1855)
柯西(1789—1857)
狄利克雷(1805—1859)
哈密顿(1805—1865)
黎曼(1826—1866)
彭赛列(1788—1867)
格拉斯曼(1809—1877)
刘维尔(1809—1882)

史密斯(1826—1883)
柯瓦列夫斯卡娅(1850—1891)
克罗内克(1823—1891)
库默尔(1810—1893)
切比雪夫(1821—1894)
凯莱(1821—1895)
魏尔斯特拉斯(1815—1897)
西尔维斯特(1814—1897)
李(1842—1899)
埃尔米特(1822—1901)
庞加莱(1854—1912)
戴德金(1831—1916)
康托尔(1845—1918)
拉马努金(1887—1920)
克莱因(1849—1925)
米塔-列夫勒(1846—1927)
E·H·穆尔(1862—1932)
诺特(1882—1935)
豪斯多夫(1868—1942)
希尔伯特(1862—1943)
伯克霍夫(1884—1944)
巴拿赫(1892—1945)
哈代(1877—1947)
嘉当(1869—1951)
外尔(1885—1955)
博雷尔(1871—1956)
冯·诺伊曼(1903—1957)
高木贞治(1875—1960)
维布伦(1880—1960)

阿达马(1865—1963)
维纳(1894—1964)
布劳威尔(1881—1966)
亚历山大(1888—1971)
柯朗(1888—1972)
莱夫谢茨(1884—1972)
R·L·穆尔(1882—1974)
亚历山德罗夫(1896—1982)
波利亚(1887—1985)
扎里斯基(1899—1986)
柯尔莫戈洛夫(1903—1987)

构成本书传略的60位数学家,是在一定程度上考虑多样性而选出的。不足为怪的是,其中仅有三位女性,原因已在正文中清楚交代。同样不足为怪的是,犹太数学家如此之多:雅可比、西尔维斯特、克罗内克、阿达马、豪斯多夫、诺特、莱夫谢茨、波利亚、柯朗、维纳、扎里斯基和冯·诺伊曼。除大都市外,阿尔萨斯-洛林(有彭赛列、刘维尔、庞加莱)与西里西亚*(有库默尔、克罗内克、豪斯多夫、柯朗)是传主的多产之地。或有意义的是,德国东部和西部工业区的人口分布均有不同寻常的文化多样性,特别是犹太人占了很大比例。我们的传主有些来自小康甚至富裕之家,但大多数出身贫寒。总的来说,与其父母相比,他们在社会阶层中获得根本提升。在法国尤是如此,进一所精英院校(特别是巴黎综合理工学院)学习将会获得社会地位,而这需要一定程度的数学能力。约四分之一的传主终身未婚。

然而,对我们的许多传主而言,若想有所成就,获取他们所需的帮助绝非易事。中学的教师往往乐于助人,而他们仅能做到可预期的帮助,不过在少数情形中,及时的赞助也很重要:对蒙日来说是皇家军事

* 西里西亚是中欧地域的一个名称。目前,该地域的绝大部分地区属于波兰,其余小部分地区属于捷克和德国。——译者

工程学院的副院长，对傅里叶来说是欧塞尔的一些市民，对高斯来说是不伦瑞克公爵，对阿贝尔来说是克雷尔，对狄利克雷来说是费伊将军，对嘉当来说是迪博。

当我们考察各位传主父亲的职业时，也可发现一种巨大的多样性。只有诺特、维布伦和维纳三人的父亲可以说是学者，而最后一位父亲还不是科学家。格拉斯曼、伽罗瓦、米塔－列夫勒、阿达马、哈代和布劳威尔的父亲都是中学教师；欧拉、阿贝尔、黎曼、李、E·H· 穆尔和博雷尔的父亲是牧师；库默尔、戴德金、庞加莱、伯克霍夫和亚历山德罗夫的父亲是医生；彭赛列、柯西、哈密顿、史密斯、希尔伯特和波利亚的父亲是律师；热尔曼、雅可比、外尔和冯·诺伊曼的父亲是银行家；达朗贝尔、泊松、刘维尔、切比雪夫和柯瓦列夫斯卡娅的父亲是军人；拉格朗日、狄利克雷、魏尔斯特拉斯、克莱因、巴拿赫和柯尔莫戈洛夫的父亲是公务员；拉普拉斯、西尔维斯特、凯莱、克罗内克、康托尔、豪斯多夫、R·L·穆尔、莱夫谢茨和柯朗的父亲是商人。此外，我们还能见到一些不同的职业：蒙日的父亲是小商贩，傅里叶的父亲是裁缝，高斯的父亲是劳工，埃尔米特的父亲是布商，嘉当的父亲是铁匠，拉马努金的父亲是记账员，亚历山大的父亲是画家；另外还有一两位只能记作未知。遗憾的是，我们对各位传主的母亲了解甚少，通常我们仅仅知道她们的名字，有时甚至连名字都不清楚。这是尤为不幸的，因为有证据显示，对男性来说，母子关系最为重要。

我们的传主中可以算得上早慧的并不多，也许只有欧拉、高斯、阿贝尔、雅可比、哈密顿、伽罗瓦、庞加莱、博雷尔、拉马努金、维纳和冯·诺伊曼。他们中某些人具有能够瞬间记住大量数据或做大量运算的罕见才能，这种才能有时可见于孩童身上，比较明显的有欧拉、高斯、哈密顿、庞加莱、拉马努金和巴拿赫等。然而，这种才能是否有利于高等数学的研究尚存争议。

我们传主中的大部分都是正常天分而非早慧。有一些在很小的年龄就对数学展现出热情和喜好，而另一些则只是到了较晚的阶段才决定要做数学家。然而，有证据支持以下通常的观念：数学家在年轻时做

出他们最好的创造性工作——正如哈代曾说过的,数学是年轻人的游戏。说得更准确些,数学家在那个阶段孕育出他们最具原创性的想法,在之后的生涯里使之发展完善。另一个流行的观念是数学与音乐的天分相伴相生;据我所知,仅有西尔维斯特、戴德金、康托尔、阿达马、豪斯多夫和柯朗在演奏音乐方面表现出非凡的兴趣。

我试图不在书中过分强调研究方面的成就。享受完全投身于研究的生涯,这对数学家来说是绝非寻常的。大多数传主都曾花一定时间教书,取得的成果则高低不同。有一些是伟大的教师,如雅可比、狄利克雷、史密斯、希尔伯特、两位穆尔和巴拿赫;而其他人大多数都算不上。有相当一部分人在其生涯中的某个阶段曾有重要的中学教学经历,这包括傅里叶、刘维尔、格拉斯曼、库默尔、魏尔斯特拉斯和阿达马;狄利克雷和柯西则曾做过一阵家庭教师。有几位是有影响力的教材的作者,特别是欧拉、勒让德、哈代、维布伦、波利亚和柯朗。有些人则是杰出的组织者,如蒙日、米塔-列夫勒、E·H·穆尔、克莱因、柯朗和维布伦;数学政治家和企业家们也应得到尊敬,因为通常其他人会从他们那里大大受益。有些人以其他职业谋生,例如工程师、律师和行政官员。

虽然我们的传主大多数都很长寿,但也有一些人在他们的黄金时代就去世。肺病断送了泊松、阿贝尔和黎曼;而热尔曼、巴拿赫和冯·诺伊曼命绝癌症;史密斯则死于肝病。李死于恶性贫血,希尔伯特也差一点因此丧命。欧拉据说患有淋巴结核,雅可比患有糖尿病,傅里叶和拉马努金则后来被诊断出可能分别患有黏液水肿和肝阿米巴病。正如我们已经看到的,傅里叶和李(也许还有希尔伯特)表现出一些奇异行为,这在一些传记中多有描述,也许可以归因于他们所患的疾病。阿贝尔、康托尔、西尔维斯特和维纳表现出躁狂抑郁症的迹象,这在具有高度创造力的个体中不是罕见的。

对我而言,将注意力限制在出生于18世纪、19世纪和20世纪早期的数学家,包括的传主刚好不多不少。也有许多其他数学家我本应该写进来的,但在许多情况下,因为没有足够的资料我无法进行满意的

描述。仅仅依靠一份讣告或一个雄辩的纪念演讲,是不够的。个人的论文丢失和没有传记留下都是常有的事情,因为写传记的人也没有足够资料可用。

我本应该考虑一个更好的地理跨度。例如,包括俄国在内的12个欧洲国家都有代表,以法国和德国的数学家最多。但在欧洲之外,仅写到了三个国家的数学家:美国、印度和日本。在很大程度上,这反映了数学发展的历程。在许多国家,只是在比较晚近的时期才出现了数学巨匠。在20世纪,一些不引人注目的大学如雨后春笋一般迅速发展起来,然而若将出生于这一时期的人物包括进来,必定会大大增厚这本已经厚得可以的书。

本书中描述的两位传主在姊妹篇《物理学巨匠》* 中再次出现,而其他人物则只在本书中得到了全面描述。通常很难确定将某个人看成物理学家还是数学家更为贴切。虽然物理学家的生活并不比数学家更有趣,但物理学的发展与数学的发展并不平行。而且,他们之间存在着文化上的差异,这一点也许用德恩(Max Dehn)的话可以更好地解释。在他1928年为法兰克福大学师生所做的一个题为"数学家的气质"** 的演讲中,他说道:

与一般的看法相反,我想说,数学家不是来自另一个星球的古怪奇葩,至少数学学科是不会使数学家古怪的。数学家处在多种知识领域、特别是自然学科与人文学科之间,遗憾的是,这些学科在德国完全脱节。数学方法只不过是一般科学方法的一种表现形式。考虑到排中律在数学中的重要性,其方法与法律的方法相关。数学家的研究目标比自然科学家更偏重于人文精神方面,而比人文学家更科学。数学家通过其科学的整个历史而与人文学家发生联系,而最初则是与哲学的历史相联系。数学与自然科学的联系,并不止于那渗透一切精密自然科

---

* 有中译本,戴吾三、戴晓宁译,上海科技教育出版社2014年出版。——译者

** 有中译本,贺霖译,数学家的气质——他们的特征,见《数学译林》,1987年(第6卷),66—74页。——译者

学的应用。数学家清楚,最重要的刺激和鼓舞就归功于自然科学。……有时候,数学家具有诗人或征服者的激情,而在论证的严谨上,则无异于一位极其负责的政治家,或者更简单地说,无异于一位关爱孩子的父亲。数学家如同先哲一般容忍、有所为而有所不为,他们既是革命的又是保守的,既是怀疑的,又是完全乐观的。

译后记

2012年秋冬，时在上海交通大学科学史与科学文化研究院修习数学史，经陈志辉学兄推荐，我从时任上海科技教育出版社副总编、现已升任总编的王世平那里承接了本书的翻译任务。本书选取60位近代数学名家，为之作传，述其经历、论其贡献以外，注重人际联系，又颇言当时的学术思潮与社会背景，令人读之生趣。在沪期间，全书通读一过，译出部分章节。但2013年9月入京攻读博士以后，专志于明清之际中西数学交流史的考察，埋首书山，闲时无多，只能转请林君开亮等襄助其事，译文初稿方得续成。

初译阶段的具体人员分工如下：

潘澍原：序，前言，第一章，第二章第1节，第九章第1节、第2节，第十章第5节；

凌浩：第二章第2节；

刘建新：第二章第3节，第五章第3节；

赵洁：第二章第4节；

林开亮：第二章第5节、第6节，第五章第1节、第2节、第4—6节，后记；

胡越：第三章，第四章；

邵晋：第六章，第七章，第八章，第九章第3—6节，第十章第1—4节、第6节。

全书初译完成后，潘澍原通读全稿，并作校改。

感谢合作译者林开亮、邵晋、胡越及责任编辑卢源、陈雅璐、李翔诸君，微其续译、校订种种之劳，本书实难完成。

译事之难，冷暖自知。本书分工翻译，虽经统稿审校，必有疏漏甚

至错谬之处,还请读者不吝指正。

潘澍原

2016 年 7 月